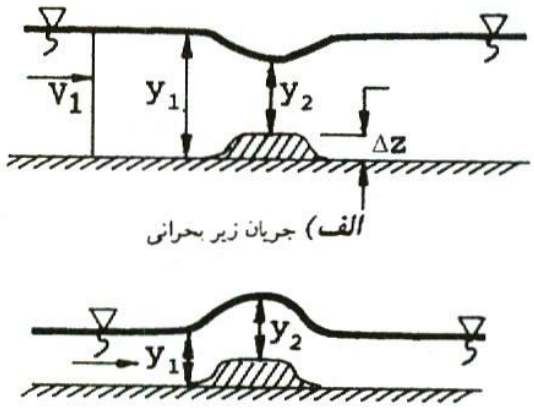
Prozhefa.com

زیر بحرانی بیش از ۴۵° می‌باشد از نظر هندسی می‌توان استدلال نمود که در این حالت $y_2 + \Delta Z$ نیز کوچکتر از y_1 بوده و چگونگی جریان مطابق شکل ۲-۸الف خواهد بود. اثبات این امر به گونهٔ دیگر نیز میسر است و آن این‌که چون q ثابت و $y_2 < y_1$ می‌باشد لذا سرعت در مقطع شمارهٔ ۲ افزایش یافته و ارتفاع معادل سرعت $(V_2^2/2g)$ نیز افزایش می‌یابد و در نتیجه فاصلهٔ سطح آب در این مقطع تا خط انرژی از فاصلهٔ سطح آب در مقطع شماره ۱ تا خط انرژی بیشتر بوده و سطح آب مقداری پایین می‌افتد.

۲- اگر وضعیت جریان قبل از برآمدگی فوق بحرانی باشد عمق ۱ به عمق ۲ تبدیل شده و افزایش عمق رخ خواهد داد (شکل ۲-۸ب).

۳- جهش از یک شاخه منحنی به شاخهٔ دیگر منحنی $E-y$ امکان فیزیکی ندارد چون با فرض عدم تغییر q این امر مستلزم این است که تغییر در عمق یا به صورت دفعی صورت پذیرد که با فیزیک مسأله هماهنگ نمی‌باشد و یا این‌که این جهش به‌صورت تدریجی انجام شود که لازمهٔ این امر نیز کاهش انرژی مخصوص (عبور از عمق بحرانی) و افزایش مجدد انرژی مخصوص در انتخاب عمق متناوب دیگر است در حالی‌که ایجاد برآمدگی فقط شامل فرآیند کاهش انرژی مخصوص می‌باشد. توجه به این مطلب در انتخاب جواب صحیح اهمیت خاص دارد.

۴- در صورتی‌که ارتفاع برآمدگی (ΔZ) به گونه‌ای باشد که E_2 از E_{min} کمتر شود در این‌صورت هیچ نقطه از منحنی جواب مسأله نخواهد بود و در چنین حالتی جریان مجبور به تغییر شرایط خود قبل از محل برآمدگی می‌باشد و رفتار دو جریان فوق بحرانی و زیربحرانی در برابر چنین مانعی متفاوت خواهد بود (پاسخ این دو جریان در مقابل اعتشاش قابل انعکاس به بالادست متفاوت می‌باشد). شرح بیشتر این موضوع با استفاده از مثال عددی ۲-۳ صورت می‌گیرد.



الف) جریان زیر بحرانی

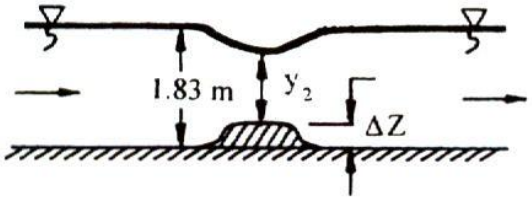
ب) جریان فوق بحرانی

شکل ۲-۸ تغییر سطح آب در بالای برآمدگی موجود در کف کانال

Prozhefa.com

مثال ۲-۳

آب به صورت یکنواخت با دبی $Q = ۹٫۹۱ m^۳/s$ و عمق $۱٫۸۳ m$ در یک کانال مستطیلی به عرض $۳٫۰۵ m$ جاری است.



شکل ۲-۹

الف) حداقل ارتفاع برآمدگی چقدر باشد تا عمق $y_۲$ برابر عمق بحرانی شود.

ب) میزان افت در سطح آب را هنگامی که ارتفاع برآمدگی نصف حالت الف باشد محاسبه نمایید.

ج) مقدار $y_۱$ را در صورتی‌که ارتفاع برآمدگی دو برابر حالت الف باشد تعیین نمایید. شکل کلی تغییرات $y_۱$ و $y_۲$ را به ازاء ΔZ های مختلف نمایش دهید.

حل :

الف : در جهت حل مسأله ابتدا وضعیت جریان قبل از برآمدگی و مقدار انرژی مخصوص را در این حالت محاسبه می‌کنیم :

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{۹٫۹۱}{۳٫۰۵} = ۳٫۲۵ \frac{m^۳}{s.m}$$

$$y_c = \left(\frac{q^۲}{g}\right)^{۱/۳} = \left(\frac{۳٫۲۵^۲}{۹٫۸۱}\right)^{۱/۳} = ۱٫۰۲۵ \text{ m}$$

با توجه به این‌که $y_۱ > y_c$ است، وضعیت جریان قبل از برآمدگی زیربحرانی می‌باشد و مقدار انرژی مخصوص در مقطع ۱ به صورت زیر به‌دست خواهد آمد :

$$E_۱ = y_۱ + \frac{q^۲}{۲gy_۱^۲} = ۱٫۸۳ + \frac{۳٫۲۵^۲}{۲ \times ۹٫۸۱ \times ۱٫۸۳^۲} \approx ۱٫۹۹ \text{ m}$$

برای بحرانی شدن جریان در مقطع ۲، می‌بایست انرژی مخصوص در این مقطع برابر E_{min} باشد.

$$E_{min} = \frac{۳}{۲} y_c = \frac{۳}{۲} \times ۱٫۰۲۵ = ۱٫۵۴ \text{ m}$$

در نتیجه با به کاربردن معادلهٔ انرژی بین دو مقطع ۱ و ۲ از جریان، مقدار ΔZ_c به‌دست خواهد آمد:

Prozhefa.com

$$E_1 = E_2 + \Delta Z$$

$$E_1 = E_{min} + \Delta Z_c$$

$$\Delta Z_c = ۱٫۹۹ - ۱٫۵۴ = ۰٫۴۵ \text{ m}$$

لذا چنانچه ارتفاع برآمدگی برابر ۰٫۴۵m باشد عمق y_1 برابر ۱٫۸۳m و عمق y_2 برابر y_c یعنی ۱٫۰۲۵ تثبیت خواهد شد و مقدار افت سطح آب در این حالت خاص برابر است با:

$$\text{افت در سطح آب} = y_1 - (y_2 + \Delta Z_c) = ۱٫۸۳ - (۱٫۰۲۵ + ۰٫۴۵) = ۰٫۳۵ \text{ m}$$

ب: اگر $\Delta Z = \frac{۰٫۴۵}{۲} = ۰٫۲۲۵\text{m}$ متر انتخاب شود، در این صورت عمق y_2 به جای رسیدن به عمق بحرانی مقداری بیش از y_c پیدا خواهد نمود (مطابق شکل ۲-۷ عمق ۱′ به عمق ۲′ تبدیل خواهد شد). با به کار بردن معادلهٔ انرژی بین دو مقطع ۱ و ۲ در این حالت نیز می‌توان عمق y_2 را تعیین کرد:

$$E_2 = E_1 - \Delta Z$$

$$y_2 + \frac{q^2}{2gy_2^2} = ۱٫۹۹ - ۰٫۲۲۵$$

$$y_2 + \frac{۳٫۲۵^2}{۲ \times ۹٫۸۱ \times y_2^2} = ۱٫۷۶۵ \rightarrow y_2 \approx ۱٫۵۳ \text{ m}$$

در انتخاب مقدار y_2 در شروع آزمون و خطا باید به این نکته توجه نمود که $y_c < y_2 < y_1$ می‌باشد.

$$\text{میزان افت سطح آب} = y_1 - (y_2 + \Delta Z) = ۱٫۸۳ - (۱٫۵۳ + ۰٫۲۲۵) = ۱۰٫۰۷۵ \text{ m}$$

ج: در صورتی‌که ارتفاع برآمدگی دو برابر حالت الف انتخاب گردد یعنی:

$$\Delta Z = ۲\Delta Z_c = ۲ \times ۰٫۴۵ = ۰٫۹ \text{ m}$$

چنانچه به منحنی $E - y$ در شکل ۲-۱۰ الف توجه نماییم و با توجه به معادلهٔ انرژی بین دو مقطع ۱ و ۲، انرژی مخصوص به اندازهٔ ΔZ تغییر یافته و در این حالت خاص مقدار انرژی مخصوص در مقطع ۲ از مقدار E_{min} کمتر خواهد شد و شکل‌گیری جریان با مقدار کمتر از E_{min} ممکن نخواهد بود. لذا در چنین حالتی در صورتی‌که وضعیت جریان قبل از مانع زیر بحرانی باشد انعکاس اثر مانع به بالادست امکان‌پذیر خواهد بود و جریان بالادست، خود را با وجود مانع هماهنگ خواهد ساخت، به عبارت دیگر انرژی مخصوص در قبل از برآمدگی به مقداری افزایش پیدا خواهد کرد (با افزایش عمق y_1) که عبور جریان از مقطع ۲ با حداقل انرژی مخصوص E_{min} ممکن گردد، لذا در این حالت جریان بر روی برآمدگی یعنی مقطع ۲ در وضعیت بحرانی (y_c) قرار

Prozhefa.com

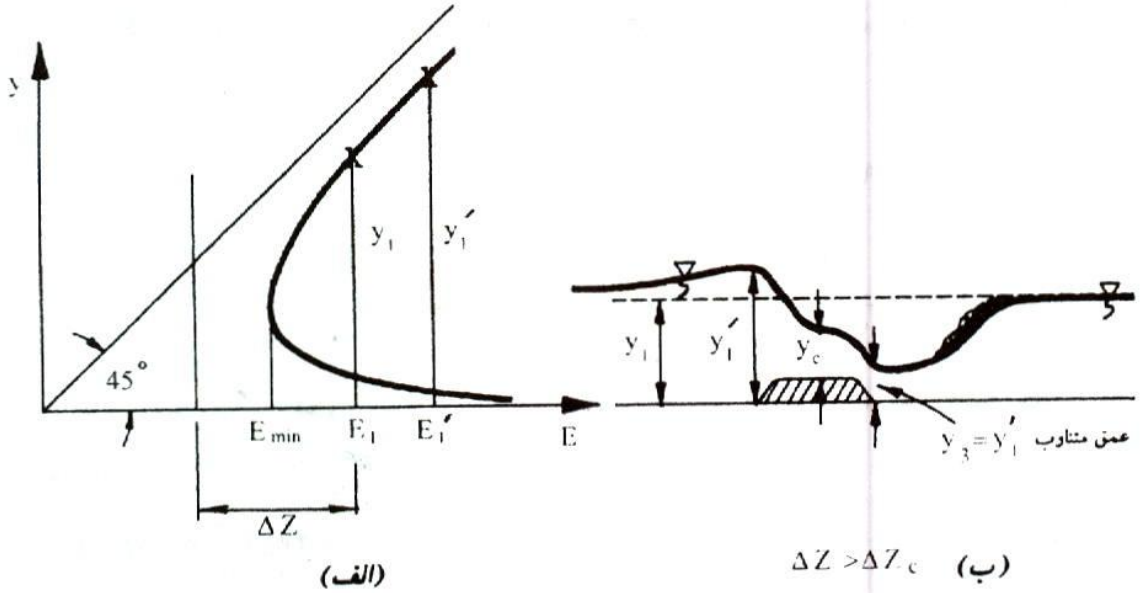
خواهد گرفت و برطبق معادلهٔ انرژی، مقدار انرژی مخصوص در مقطع ۱ به مقدار E_1' که قابل محاسبه است تبدیل خواهد شد.

پس در چنین وضعیت که اصطلاحاً وضعیت انسداد نامیده می‌شود $y_2 = y_c = ۱/۰۲۵\text{m}$ بوده، مقدار عمق y_1' را نیز با به کار بردن معادلهٔ انرژی به صورت زیر می‌توان یافت:

$$E_1' = E_2 + \Delta Z$$

$$E_1' = E_{min} + \Delta Z$$

$$E_1' = ۱/۵۴ + ۰/۹ = ۲/۴۴\ \text{m}$$



(الف) (ب) $\Delta Z > \Delta Z_c$

شکل ۲-۱۰

$$y_1' + \frac{q^2}{2g(y_1')^2} = ۲/۴۴ \quad \Rightarrow \quad y_1' + \frac{۳/۲۵^2}{۲ \times ۹/۸۱ \times (y_1')^2} = ۲/۴۴$$

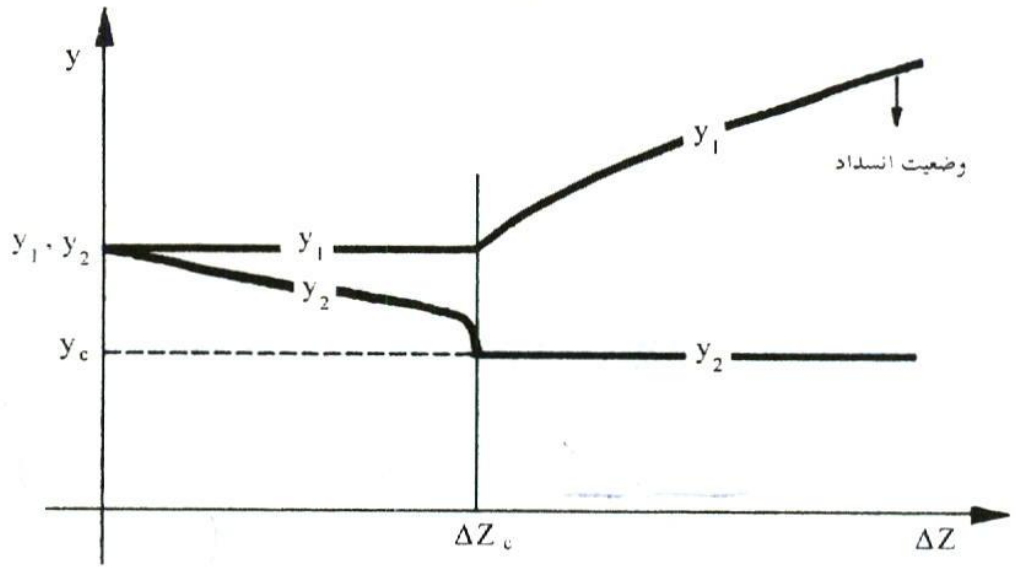
با توجه به این‌که در این حالت مقدار $y_1' > y_1$ می‌باشد جواب معادلهٔ فوق با استفاده از آزمون و خطا برابر ۲/۳۵m به‌دست خواهد آمد:

$$y_1' \approx ۲/۳۵\ \text{m}$$

شکل ۲-۱۰ ب تصویر جریان را در وضعیت انسداد (در جریان زیر بحرانی) نشان می‌دهد.

با توجه به موارد بحث شدهٔ فوق حالت کلی منحنی تغییرات y_1 و y_2 در برابر ΔZ برای جریان زیربحرانی در شکل ۲-۱۱ ترسیم گردیده است.

Prozhefa.com



شکل ۲-۱۱ (بدون مقیاس)

از نکات اساسی دیگری که می‌تواند مدنظر باشد تعیین مقدار عمق جریان پس از برآمدگی (y_3) است که در این صورت با نوشتن معادلهٔ انرژی بین مقاطع ۲ و ۳ و درنظر گرفتن این مطلب که انرژی مخصوص در مقطع ۳ به میزان ΔZ نسبت به مقطع ۲ افزایش داشته و به مقدار E_1 خواهد رسید (با توجه به معادلهٔ انرژی، کاهش در ارتفاع کف کانال معادل با افزایش انرژی مخصوص در مقطع دوم نسبت به مقطع اول است) داریم:

$$y_2 + \frac{q^2}{2gy_2^2} + \Delta Z = y_3 + \frac{q^2}{2gy_3^2}$$

$$E_2 + \Delta Z = E_3$$

$$E_3 = E_1 = E_2 + \Delta Z$$

لذا در صورتی‌که جریان در وضعیت انسداد نباشد، ضمن عبور از برآمدگی به عمق y_2 و سپس به عمق اولیه یعنی y_1 خواهد رسید ($y_3 = y_1$) و در صورتی‌که ارتفاع برآمدگی به گونه‌ای باشد که وضعیت انسداد در جریان پیش آید در این‌صورت $y_1 = y_1'$ و $y_2 = y_c$ بوده و y_3 می‌تواند براساس رابطهٔ $E_3 = E_{min} + \Delta Z$ تعیین گردد. بدین‌منظور باید از نقطهٔ مینیمم منحنی $E - y$ انرژی مخصوص را به اندازهٔ ΔZ افزایش داد تا y_3 روی منحنی $E - y$ مشخص گردد و در این‌صورت دو عمق، یکی y_1' و دیگری عمق متناوب آن‌که بر روی شاخهٔ فوق بحرانی منحنی $E - y$ قرار دارد می‌تواند جواب مناسب y_3 باشد.

Prozhefa.com

ولی از نظر فیزیکی می‌توان احساس نمود که هرگرفتگی و انسداد در جریان و سپس رهاشدن آن پس از مانع، حالت دارای سرعت بیشتر و عمق کمتر یعنی جریان فوق بحرانی (عمق متناوب y_1') را انتخاب نماید و در این‌صورت عمق متناوب y_1' بر روی شاخهٔ فوق بحرانی به‌عنوان جواب y_2 انتخاب خواهد شد. این وضعیت از جریان در شکل ۲-۱۰ ب ترسیم گردیده است و با توجه به‌این‌که وضعیت جریان بعد از برآمدگی در حالت فوق بحرانی می‌باشد، می‌توان انتظار داشت که جریان در جهت رسیدن به وضعیت اولیهٔ خود (جریان یکنواخت زیر بحرانی) با پرش هیدرولیکی روبرو شود. در حقیقت وجود پرش هیدرولیکی بعد از برآمدگی دلالت بر وجود وضعیت انسداد و نیز شکل‌گیری عمق بحرانی بر روی برآمدگی دارد.

مقطعی از جریان که در آن ارتباط مشخص بین عمق و دبی جریان وجود داشته باشد، مقطع کنترل نامیده می‌شود و با توجه به مطالب کوتاه ذکر شده در بالا می‌توان این استنباط را داشت که در صورتی‌که ارتفاع برآمدگی به ازاء دبی خاص از حد معینی بیشتر انتخاب شود عمق بحرانی بر روی برآمدگی تثبیت خواهد شد و این مقطع یک مقطع کنترل می‌باشد زیراکه با اندازه گیری عمق در این مقطع می‌توان پی به دبی جریان برد ($y_c = (\frac{q^2}{g})^{1/3}$). براساس این موضوع که پایهٔ یکی از روشهای اندازه گیری دبی جریان در کانالهای باز می‌باشد، سرریزی موسوم به سریز لبه پهن در کانالها نصب می‌گردد که با ایجاد عمق بحرانی بر روی سرریز می‌توان پی به دبی جریان برد. در فصل هفتم به این مطلب پرداخته خواهد شد. علاوه بر این، مقطع کنترل وضعیت جریان را در حوالی خود نیز در اختیار دارد و جریان در عبور از این مقطع مجبور به‌پذیرش انحنائی متناسب با شکل‌گیری عمق بحرانی بر روی برآمدگی می‌باشد. این نکته می‌تواند در تحلیل جریان در حوالی بندها و سرریزها مورد استفاده قرارگیرد.

در مثال جامع ۲-۳ رفتار جریان زیر بحرانی در برخورد با یک مانع با ارتفاع ثابت ΔZ مورد بررسی قرار گرفت ولی در صورتی که جریان قبل از برآمدگی فوق بحرانی باشد می‌توان گفت که اگر تحت‌تأثیر برآمدگی مقدار انرژی مخصوص بر روی برآمدگی از E_{min} کمتر نشود با به کار بردن معادلهٔ انرژی و استفاده از مفهوم انرژی مخصوص می‌توان افزایش عمق بر روی برآمدگی را شبیه قسمت «ب» این مثال به‌دست آورد ولی هرگاه مقدار انرژی مخصوص بر روی برآمدگی از E_{min} کمتر شود، تغییر اجباری وضعیت جریان در بالادست توأم با پرش هیدرولیکی بوده و از آن‌جاکه موقعیت دقیق پرش قبل از مانع وافت انرژی حاصل بدون مطالعه و مشاهدهٔ عینی جریان مشخص نمی‌باشد نمی‌توان این وضعیت را از طریق معادلهٔ انرژی مورد بررسی قرار داد.

Prozhefa.com

۲-۵ جریان ناشی از یک تنگنای موضعی در کانال مستطیلی

در پاسخ به سؤال دوم مطرح شده در قسمت ۲-۳، که ایجاد یک تنگنای موضعی در مسیر یک کانال مستطیلی می‌باشد (شکل ۲-۳)، در این قسمت تحلیل مسأله از طریق منحنی $E - y$ انجام می‌پذیرد. رابطهٔ ۲-۵ که معادلهٔ انرژی در ترکیب با معادلهٔ پیوستگی می‌باشد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y_1 + \frac{q_1^2}{2gy_1^2} = y_2 + \frac{q_2^2}{2gy_2^2} \qquad (۲-۵)$$

با توجه به این رابطه می‌توان گفت که اگرچه انرژی مخصوص بین دو مقطع ۱ و ۲ ثابت باقی‌مانده است اما مقدار دبی عبوری در واحد عرض بین دو مقطع تغییر کرده است یعنی:

$$E_1 = E_2$$

$$q_2 > q_1$$

به منظور تعبیر فیزیکی مسأله، دو منحنی انرژی مخصوص در برابر عمق یکی با مشخصهٔ q_1 و دیگری بامشخصهٔ q_2 لازم به ترسیم می‌باشند (شکل ۲-۱۲) و با توجه به این‌که $q_2 > q_1$ می‌باشد می‌توان گفت که:

$$q_2 > q_1 \Rightarrow (y_c)_2 > (y_c)_1 \rightarrow E_{min2} > E_{min1}$$

چنانچه مشخص است، منحنی‌های $E - y$ با افزایش q به سمت راست متمایل خواهند شد و نقاط مینیمم منحنی‌ها بر روی خطی به معادلهٔ $E = \frac{3}{2} y$ قرار خواهند گرفت.

در صورتی‌که قبل از تنگنای موضعی، مقدار انرژی مخصوص برابر E_1 باشد، هنگام رسیدن به تنگنا مقدار انرژی مخصوص ثابت مانده ولی اعماق، از روی منحنی $E - y$ با مشخصهٔ q_1 به‌منحنی $E - y$ با مشخصهٔ q_2 منتقل خواهند شد (شکل ۲-۱۲) و لذا توجه به موارد زیر در تحلیل جریان ضرورت دارد:

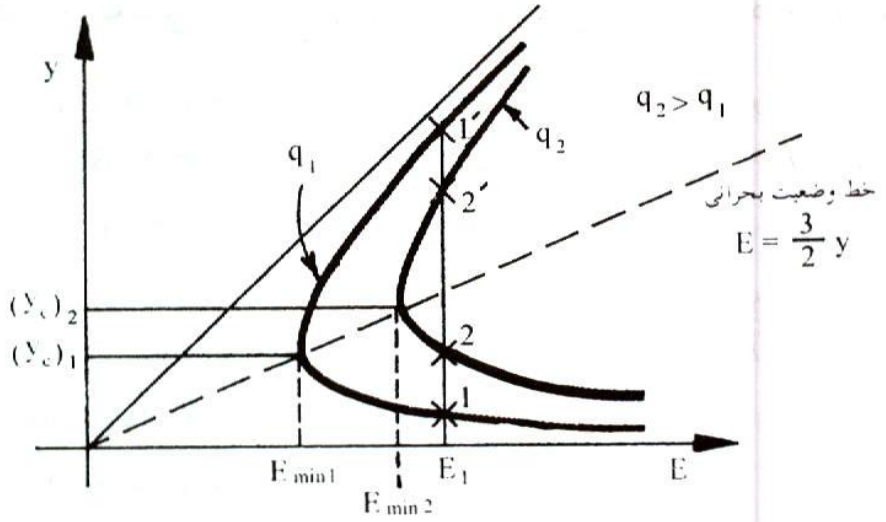
۱- چنانچه وضعیت جریان قبل از تنگنا زیر بحرانی باشد جریان کاهش عمق داشته، عمق ۱′ به‌عمق ۲′ تبدیل خواهد شد.

۲- در صورتی‌که وضعیت جریان قبل از تنگنا فوق بحرانی باشد، عمق ۱ به ۲ تبدیل شده، افزایش عمق رخ خواهد داد.

۳- جهش از یک شاخهٔ منحنی به شاخهٔ دیگر منحنی از نظر فیزیکی امکان‌پذیر نمی‌باشد (چرا؟)

۴- هرگاه کاهش عرض به گونه‌ای باشد که منحنی $E - y$ با مشخصهٔ q_2 در سمت راست خط قائم به معادلهٔ $E = E_1$ قرار گیرد ($E_1 < E_{min2}$) در این‌صورت هیچ نقطه از منحنی $E - y$ با مشخصهٔ q_2 جواب مسأله نخواهد بود (شکل ۲-۱۳ الف). با توجه به این مطلب، در صورتی‌که وضعیت جریان قبل از تنگنا زیر بحرانی باشد، وضعیت انسداد پیش آمده و انرژی مخصوص در ابتدای تنگنا به اندازه‌ای افزایش پیدا خواهد کرد که عبور جریان از مقطع ۲ با حداقل انرژی مخصوص

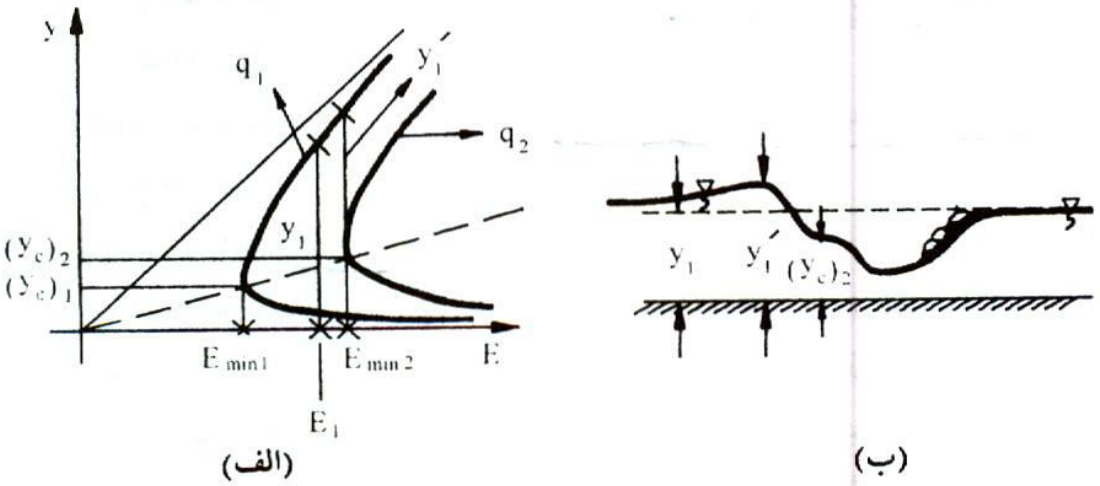
Prozhefa.com



شکل ۲-۱۲ منحنی‌های $E - y$ در عبور آب از یک تنگنا

$E_{min۲}$ ممکن گردد و این‌کار با افزایش عمق $y_۱$ انجام می‌شود. در این‌حالت عمق در مقطع ۲ به مقدار $(y_c)_۲$ تثبیت خواهد شد و لذا می‌توان گفت که مقطع ۲ به عنوان یک مقطع کنترل عمل می‌نماید. این موضوع اساس اندازه گیری دبی جریان در کانالهای روباز با استفاده از ایجاد تأسیساتی به نام ناودانهای عمق بحرانی می‌باشد. تصویر قائم جریان می‌تواند مشابه شکل ۲-۱۳ب باشد.

چنانچه وضعیت جریان قبل از تنگنا فوق بحرانی باشد، انعکاس اثر تنگنا به بالادست ممکن نخواهد بود و قبل از تنگنا پرش هیدرولیکی اتفاق خواهد افتاد. تفسیر و بررسی این وضعیت از جریان از طریق معادلهٔ انرژی به تنهائی انجام نمی‌شود.



شکل ۲-۱۳

Prozhefa.com

مثال ۲-۴

در یک کانال مستطیلی (شکل ۲-۱۴) به عرض $b_1 = ۳۰/۰\,m$ ، دبی $۹۰\,m^3/s$ باعمق یکنواخت $y_1 = ۲/۵\,m$ جریان دارد. ما کزیمم عرض پیش آمدگی پایه‌های پل را به گونه‌ای تعیین نمایید که باعث تغییر وضعیت جریان آب در بالادست نگردد. از افت انرژی موضعی صرفنظر شود.

حل:

برای آن‌که در وضعیت جریان در بالادست پل تغییری حاصل نشود می‌بایست در اثر تنگنای موضعی ناشی از پل اگر وضعیت جریان قبل از پل فوق بحرانی است پدیدهٔ پرش هیدرولیکی مشاهده نشود و در صورتی‌که وضعیت جریان قبل از پل زیر بحرانی است وضعیت انسداد پیش نیاید. برای تعیین وضعیت جریان قبل از محل پل به صورت زیر عمل می‌شود:

$$q_1 = \frac{Q}{b_1} = \frac{۹۰}{۳۰} = ۳\ \frac{m^3}{s.m}$$

$$q_1 = V_1 y_1 \Rightarrow ۳ = V_1 \times ۲/۵ \Rightarrow V_1 \approx ۱/۲\ m/s$$

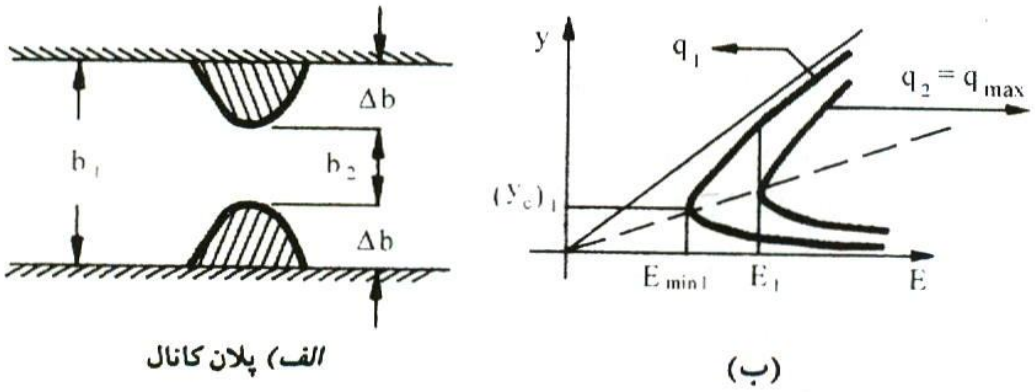
$$Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{g y_1}} = \frac{۱/۲}{\sqrt{۹/۸۱ \times ۲/۵}} \approx ۰/۲۴۲ < ۱$$

زیربحرانی

چون وضعیت جریان قبل از پل زیربحرانی است پس احتمال وضعیت انسداد جریان وجود دارد و ما کزیمم عرض پل باید به نحوی انتخاب شود که این احتمال از بین برود. بدین‌منظور مطابق شکل ۲-۱۴ ب منحنی $E - y$ در محل پل باید مماس بر خط قائم $E = E_1$ انتخاب شود.

$$E_1 = y_1 + \frac{q_1^2}{۲gy_1^2} = ۲/۵ + \frac{۳^2}{۲ \times ۹/۸۱ \times ۲/۵^2} \approx ۲/۵۷۳\ m$$

افت انرژی موضعی وجود ندارد.



الف) پلان کانال

(ب)

شکل ۲-۱۴

Prozhefa.com

$$E_{min۲} = E_۱ = ۲/۵۷۳ \text{ m}$$

با توجه به مشخص بودن $E_{min۲}$ عمق بحرانی در محل پل محاسبه می‌شود:

$$(y_c)_۲ = \frac{۲}{۳} \times E_{min۲} = \frac{۲}{۳} \times ۲/۵۷۳ \approx ۱/۷۱ \text{ m}$$

$$(y_c)_۲ = \left(\frac{q_۲^۲}{g}\right)^{۱/۳} \Rightarrow ۱/۷۱ = \left(\frac{q_۲^۲}{۹/۸۱}\right)^{۱/۳} \Rightarrow q_۲ = ۷ \frac{\text{m}^۳}{\text{s.m}}$$

$$q_۲ = \frac{Q}{b_۲} \Rightarrow ۷ = \frac{۹۰}{b_۲} \Rightarrow b_۲ = ۱۲/۸۵ \text{ m}$$

$$(\Delta b)_{max} = \frac{b_۱ - b_۲}{۲} = \frac{۳۰ - ۱۲/۸۵}{۲} \approx ۸/۵۷ \text{ m}$$

مطالب شرح داده شده در بخشهای ۲-۴ و ۲-۵ در تحلیل جریان ناشی از یک برآمدگی و یا یک تنگنای موضعی در مسیر کانال مستطیلی می‌توانند از طریق منحنی $q - y$ ، به ازاء یک انرژی مخصوص ثابت $\bar{E}$ نیز مورد تفسیر قرار گیرند. مثال ۲-۵ روشنگر این روش تفسیر می‌باشد.

مثال ۲-۵

با استفاده از منحنی $q - y$ وضعیت جریان را در حالت ایجاد تنگنای موضعی در یک کانال مستطیلی بررسی نمایید. در نظر داشته باشید که مقدار $\bar{E}$ ثابت می‌باشد.

حل :

مقدار انرژی مخصوص در یک کانال مستطیلی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$E = y + \frac{q^۲}{۲gy^۲} \Rightarrow (E - y)\, ۲gy^۲ = q^۲$$

منحنی q در مقابل y برای انرژی مخصوصی معادل $\bar{E}$ به صورت شکل ۲-۱۵ الف در خواهد آمد. عملیات ریاضی زیر نشان می‌دهد که مقدار q_{max} در موقعیت عمق بحرانی پیش می‌آید:

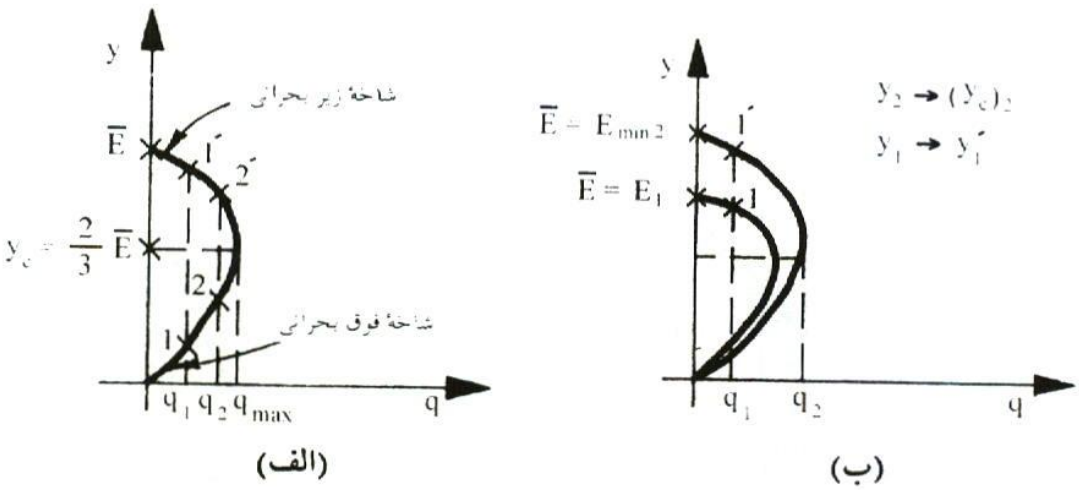
$$-۲gy^۲ + ۴gy\,(\bar{E} - y) = ۲q \frac{dq}{dy}$$

$$\frac{dq}{dy} = ۰ \Rightarrow -۲gy^۲ - ۴gy^۲ + ۴gy\,\bar{E} = ۰ \Rightarrow y = \frac{۲}{۳}\bar{E}$$

$y = \frac{۲}{۳}\bar{E}$ مشخصهٔ عمق بحرانی می‌باشد که در این عمق عدد فرود جریان برابر واحد و عمق بحرانی برابر $(\frac{q_{max}}{g})^{۱/۳}$ به‌دست خواهند آمد. این نقطهٔ منحنی نیز در شکل ۲-۱۵ الف دیده می‌شود و در این نقطه منحنی به دو شاخهٔ زیر بحرانی و فوق بحرانی تقسیم خواهد شد.

درصورتی‌که مطابق شکل ۲-۱۵ الف و به جهت تنگنای موضعی مقدار $q_۱$ به $q_۲$ افزایش یابد، می‌توان مشاهده نمود که در جریان فوق بحرانی عمق ۱ به ۲ تبدیل شده و افزایش عمق رخ خواهد داد و در وضعیت جریان زیر بحرانی عمق ۱′ به ۲′ تبدیل شده و کاهش عمق پیش خواهد آمد.

Prozhefa.com



شکل ۲-۱۵

در صورتی‌که عرض تنگنا به گونه‌ای انتخاب شود که q_2 از q_{max} تجاوز نماید، در جریان زیربحرانی حالت انسداد پیش خواهد آمد و در نتیجه عمق در محل تنگنا به مقدار $(y_c)_2 = (\frac{q_2^2}{g})^{1/3}$ تثبیت خواهد شد و عمق در قبل از تنگنا از روی منحنی $q - y$ با مشخصهٔ $\overline{E}$ به‌روی منحنی $q - y$ با مشخصهٔ $E_{min2} = \frac{3}{2}(y_c)_2$ منتقل خواهد شد. این افزایش عمق از y_1 به y_1' در شکل ۲-۱۵ ب دیده می‌شود.

مثال ۲-۶

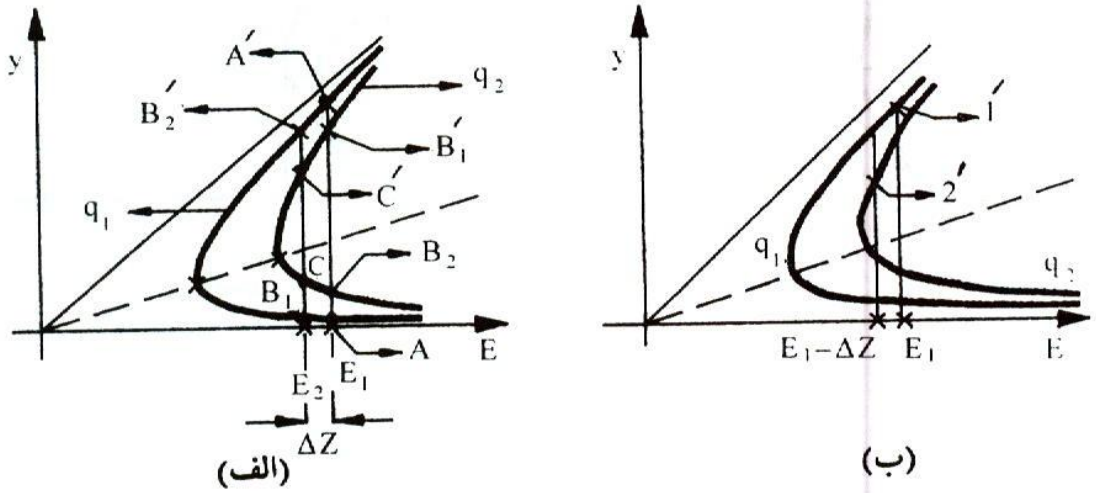
جریان آبی با دبی $16 m^3/s$ و عمق $4/0 m$ در یک کانال مستطیلی به عرض $4/0 m$ برقرار است. در مقطع پایین‌دست، عرض مقطع به $3/5 m$ کاهش داده و نیز کف کانال در همین محل به مقدار ΔZ بالا برده می‌شود. تغییرات سطح آب را در محل این تبدیل در دو حالت الف) $\Delta Z = 0/2 m$ و ب) $\Delta Z = 0/35 m$ بررسی نمایید. از افت انرژی در محل تبدیل صرفنظر می‌گردد.

حل:

این مثال تغییر موضعی جریان ناشی از یک تبدیل را در حالت کلی نشان می‌دهد. در این تبدیل فرآیند تغییر در عمق جریان تحت دو اثر کاهش در عرض و نیز تغییر در ارتفاع کف کانال به‌صورت همزمان انجام می‌شود. مطابق شکل ۲-۱۶ الف در صورتی‌که جریان فوق بحرانی باشد، تغییر عمق جریان از A به C در مسیر AB_1C و یا AB_2C صورت می‌گیرد و در صورتی‌که جریان زیربحرانی باشد تغییر عمق جریان از A' به C' در مسیر $A'B_1'C'$ و یا $A'B_2'C'$ صورت خواهد

Prozhefa.com

گرفت. در این پدیده چنانکه مشاهده می‌شود امکان رسیدن به عمق بحرانی نیز با سرعت بیشتری انجام خواهد شد.



شکل ۲-۱۶

در جهت حل این مثال ابتدا مشخصات جریان در مقطع بالادست (قبل از تبدیل) را به‌دست می‌آوریم:

$$q_1 = \frac{16}{4} = 4 \frac{m^3}{s.m}$$

$$V_1 = \frac{q_1}{y_1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ m/s}$$

$$Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}} = \frac{2}{\sqrt{9/81 \times 2}} = 0/45 < 1$$ جریان زیربحرانی

$$(y_c)_1 = \left(\frac{q_1^2}{g}\right)^{1/3} = \left(\frac{4^2}{9/81}\right)^{1/3} = 1/178 \text{ m}$$

$$E_{min1} = \frac{3}{2} \times 1/178 = 1/766 \text{ m}$$

$$E_1 = y_1 + \frac{q_1^2}{2gy_1^2} = 3 + \frac{16}{2 \times 9/81 \times 4} = 2/204 \text{ m}$$

مشخصات در مقطع پایین دست (محل تبدیل):

$$q_2 = \frac{16}{3/5} = 4/57 \frac{m^3}{s.m}$$

$$(y_c)_2 = \left(\frac{4/57^2}{9/81}\right)^{1/3} = 1/287 \text{ m}$$

Prozhefa.com

$$E_{min۲} = ۱/۵\ (y_c)_۲ = ۱/۵ \times ۱/۲۸۷ = ۱/۹۳\ \text{m}$$

با این مشخصات، منحنی‌های انرژی مخصوص به صورت شکل ۲-۱۶ ب ترسیم می‌شوند که موقعیت $E_۱$ نیز بر روی این نمودار مشخص گردیده است.

حالت الف ($\Delta Z = ۰/۲\text{m}$) : باکاهش انرژی مخصوص در مقطع تبدیل خواهیم داشت:

$$E_۱ - \Delta Z = ۲/۲۰۴ - ۰/۲ = ۲/۰۰۴$$

با توجه به این‌که مقدار ۲/۰۰۴ بیشتر از $E_{min۲}$ می‌باشد، می‌توان گفت که عمق از موقعیت ۱′ به موقعیت ۲′ منتقل خواهد شد. عمق $y_۲$ را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود :

$$E_۲ = y_۲ + \frac{q_۲^۲}{g y_۲^۲} = ۲/۰۰۴$$

$$y_۲ + \frac{۴/۵۷^۲}{۲ \times ۹/۸۱ \times y_۲^۲} = ۲/۰۰۴ \xrightarrow{\text{آزمون و خطا}} y_۲ = ۱/۵۷۵\ \text{m}$$

در تخمین $y_۲$ باید در نظر داشت که $y_۲$ بیشتر از $(y_c)_۲$ و کمتر از $y_۱$ انتخاب گردد.

حالت ب ($\Delta Z = ۰/۳۵\text{m}$) :

$$E_۲ = E_۱ - \Delta Z = ۲/۲۰۴ - ۰/۳۵ = ۱/۸۵۴ < E_{min۲}$$

با توجه به این‌که $E_۲ < E_{min۲}$ می‌باشد لذا وضعیت انسداد در جریان پیش خواهد آمد و در نتیجه عمق $y_۲$ در حد $(y_c)_۲$ تثبیت شده و عمق $y_۱$ به مقداری افزایش پیدا خواهد کرد که عبور جریان با $E_{min۲}$ از مقطع تبدیل ممکن گردد:

$$y_۲ = (y_c)_۲ = ۱/۲۸۷\ \text{m}$$

$$E_۲ = E_۱' - \Delta Z$$

$$E_{min۲} = E_۱' - \Delta Z$$

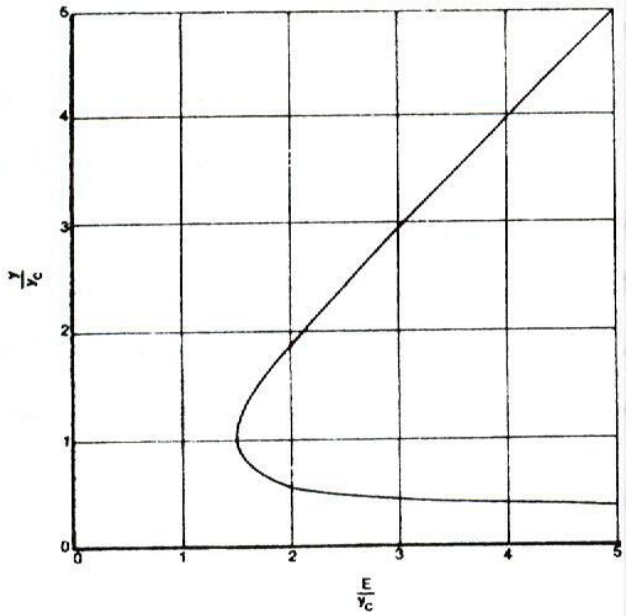
$$۲/۲۸ = y_۱' + \frac{q_۱^۲}{۲g(y_۱')^۲} = y_۱' + \frac{۴^۲}{۲ \times ۹/۸۱ \times (y_۱')^۲} \longrightarrow y_۱' = ۲/۰۹۴$$

در انتخاب $y_۱'$ باید در نظر داشت که مقدار $y_۱'$ بیشتر از $y_۱$ انتخاب شود.

مثال ۲-۷

شکل بدون بعد منحنی انرژی مخصوص در برابر عمق را در یک کانال مستطیلی به‌دست آورید. این منحنی را ترسیم نموده و کاربرد آن را در به‌دست آوردن اعماق متناوب بررسی نمایید.

Prozhefa.com



شکل ۲-۱۷

حل:

در یک کانال مستطیلی می‌توان نوشت:

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2}$$

$$E = y + \frac{y_c^3}{2y^2} \Rightarrow \frac{E}{y_c} = \frac{y}{y_c} + \frac{y_c^2}{2y^2}$$

در صورتی‌که $\frac{E}{y_c} = E'$ و $\frac{y}{y_c} = y'$ اختیار گردند داریم:

$$E' = y' + \frac{1}{2(y')^2} \qquad (۲-۱۳)$$

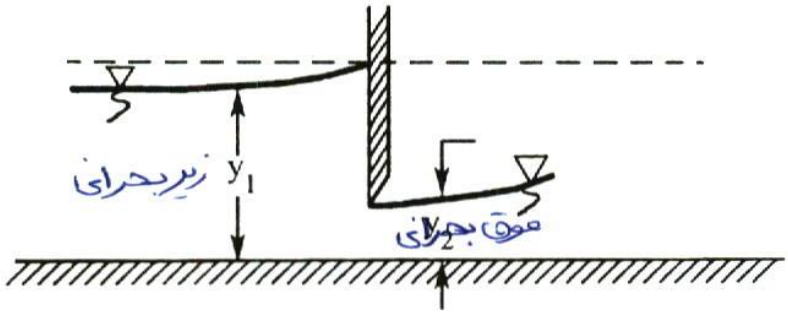
رابطهٔ ۲-۱۳ شکل بدون بعد انرژی مخصوص در برابر عمق را در یک کانال مستطیلی نشان می‌دهد. منحنی $E' - y'$ در شکل ۲-۱۷ ترسیم گردیده است.

در صورتی‌که در یک کانال مستطیلی مقدار عمق بحرانی با معلوم بودن Q و عرض کانال مشخص گردد، با توجه به منحنی شکل ۲-۱۷ به ازاء هر انرژی مخصوص ثابت می‌توان اعماق متناوب y_1 و y_2 را تعیین نمود.

مثال ۲-۸

توضیح دهید که در صورتی‌که در یک کانال مستطیلی جریان به صورت شکل ۲-۱۸ از زیر یک دریچه کشوئی برقرار گردد، وضعیت جریان قبل از دریچهٔ زیربحرانی و بعد از دریچهٔ فوق بحرانی خواهد بود.

Prozhefa.com



شکل ۲-۱۸

حل:

با توجه به این‌که تغییر عمق در محل دریچه به‌صورت موضعی و بدون انبساط جریان صورت می‌گیرد، از افت انرژی موضعی صرفنظر می‌شود. علاوه براین، تغییر در کف کانال بین دو مقطع ۱ و ۲ وجود نداشته و لذا معادلهٔ انرژی بین دو مقطع ۱ و ۲ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H_1 = H_2 \Rightarrow y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

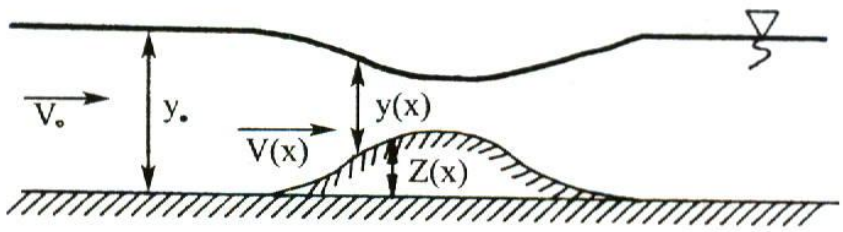
لذا:

$$E_1 = E_2$$

پس، انرژی مخصوص بین دو مقطع ۱ و ۲ ثابت بوده و دو عمق ۱ و ۲، اعماق متناوب مربوط به‌انرژی مخصوص ثابت می‌باشند و جریان در عمق بیشتر قبل از دریچهٔ زیر بحرانی و در عمق کمتر یعنی بعد از دریچهٔ فوق بحرانی خواهد بود.

مثال ۲-۹

درصورتی‌که‌مطابق‌شکل ۲-۱۹ دریک‌کانال‌مستطیلی‌جریان‌قبل‌ازبرآمدگی دارای عمق ثابت y_0 و سرعت V_0 باشد و نیز تغییر در ارتفاع کف، در امتداد طولی کانال توسط تابع $Z(x)$ بیان گردد، نحوهٔ تغییرات سطح آب در روی این برآمدگی را بررسی نمایید. از افت انرژی صرفنظر می‌شود.



شکل ۲-۱۹

Prozhefa.com

حل :

معادلهٔ انرژی بین مقطع قبل از برآمدگی و یک نقطه روی برآمدگی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y_0 + \frac{V_0^2}{2g} = Z(x) + y(x) + \frac{V(x)^2}{2g} \qquad (۱۴-۲)$$

در صورتی‌که از رابطهٔ (۲-۱۴) نسبت به x مشتق‌گیری شود خواهیم داشت:

$$0 = \frac{dZ}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{V}{g}\frac{dV}{dx} \qquad (۱۵-۲)$$

از طرفی معادلهٔ پیوستگی بین دو مقطع به صورت زیر می‌باشد :

$$Vy = V_0 y_0$$

$$Vdy + ydV = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{ydV}{dx} = \frac{-Vdy}{dx} \qquad (۱۶-۲)$$

از ترکیب دو رابطهٔ ۲-۱۶ و ۲-۱۵ خواهیم داشت :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{dZ}{dx} - \frac{V}{gy}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dZ}{dx}}{Fr^2 - 1} \qquad (۱۷-۲)$$

این رابطه نشان می‌دهد که :

- در صورتی‌که جریان قبل از برآمدگی زیربحرانی باشد ($Fr < 1$) وارتفاع کف کانال افزایش یابد ($\frac{dZ}{dx} > 0$)، عمق جریان روی برآمدگی کاهش خواهد یافت ($\frac{dy}{dx} < 0$).
- چنانچه جریان قبل از برآمدگی زیر بحرانی باشد ($Fr < 1$) و ارتفاع کف کاهش یابد ($\frac{dZ}{dx} < 0$)، عمق جریان روی برآمدگی افزایش خواهد یافت ($\frac{dy}{dx} > 0$).

دو حالت ذکر شده در شکل ۲-۱۹ مشاهده می‌شوند (؟).

- هرگاه جریان قبل از برآمدگی فوق بحرانی باشد ($Fr > 1$) و ارتفاع کف افزایش یابد ($\frac{dZ}{dx} > 0$)، عمق جریان روی برآمدگی افزایش نشان خواهد داد ($\frac{dy}{dx} > 0$) .
- اگر جریان قبل از برآمدگی فوق بحرانی باشد ($Fr > 1$) و ارتفاع کف کاهش یابد ($\frac{dZ}{dx} < 0$)، عمق جریان روی برآمدگی کاهش نشان خواهد داد ($\frac{dy}{dx} < 0$).

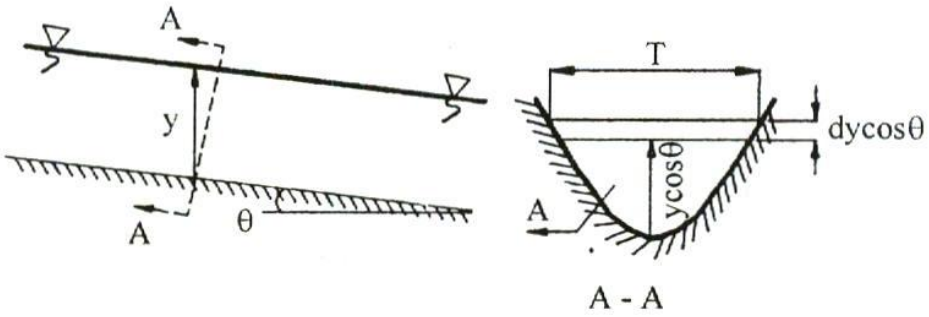
بررسیهای ذکر شده، قبلاً با استفاده از منحنی $E - y$ در بخش ۲-۴ صورت گرفته است.

Prozhefa.com

۲-۶ منحنی E - y در حالت کلّی و برای هر مقطع دلخواه

در قسمتهای قبل مفاهیم انرژی مخصوص توضیح داده شدند و کاربردهای این مفاهیم در مقطع مستطیلی شکل به تفصیل مورد بررسی قرار گرفتند. برای معرفی منحنی $E - y$ و مشخصات آن در مورد مقاطع با هر شکل دلخواه و در حالت $\alpha \neq 1$ ، شکل ۲-۲۰ راکه سطح مقطع جریان در صفحه‌ای عمود بر جهت عمومی حرکت آب را در یک کانال منشوری نشان می‌دهد در نظر می‌گیریم. انرژی مخصوص در هر مقطع از جریان برابر است با:

$$E = y\cos^2\theta + \alpha\frac{V^2}{2g} = y\cos^2\theta + \alpha\frac{Q^2}{2gA^2}$$



شکل ۲-۲۰

منحنی $E - y$ به ازاء یک دبی ثابت به صورت شکل ۲-۲۱ الف ترسیم گردیده است. این منحنی دارای یک مجانب افقی به معادلهٔ $y = 0$ و یک مجانب مایل به معادلهٔ $E = y\cos^2\theta$ می‌باشد که در نتیجه زاویهٔ θ' در شکل ۲-۲۱ برابر $\tan^{-1}\frac{1}{\cos^2\theta}$ خواهد بود. جهت به‌دست آوردن مشخصات نقطهٔ بحرانی این منحنی، از E نسبت به y مشتق گیری می‌شود[1]:

$$\frac{dE}{dy} = \cos^2\theta + \frac{\alpha Q^2}{2g}\left(\frac{-2A\frac{dA}{dy}}{A^4}\right) = \cos^2\theta - \frac{\alpha Q^2\frac{dA}{dy}}{gA^3} \qquad (۲-۱۸)$$

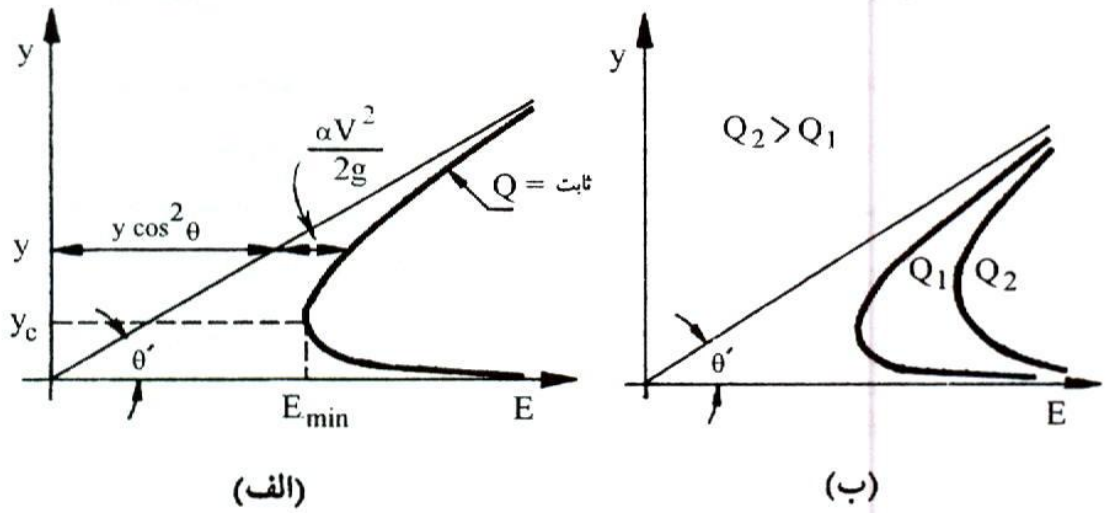
با دقت در شکل ۲-۲۰ ملاحظه می‌شود که به ازاء تغییر dy در عمق میزان تغییر در مساحت مقطع جریان برابر خواهد شد با:

$$dA = Tdy\cos\theta$$

که در نتیجه $\frac{dA}{dy} = T\cos\theta$ و رابطهٔ ۲-۱۸ به شکل زیر نوشته می‌شود:

۱: در مشتق گیری تغییرات α با عمق در نظر گرفته نشده است که فرض دقیقی نمی‌باشد.

Prozhefa.com



شکل ۲-۲۱

$$\frac{dE}{dy} = \cos^2\theta - \frac{\alpha Q^2 T \cos\theta}{gA^3}$$

و با قرار دادن $\frac{dE}{dy} = 0$، مشخصات نقطهٔ بحرانی به‌دست خواهد آمد:

$$\frac{dE}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha Q^2 T}{gA^3 \cos\theta} = 1 \qquad (۲-۱۹)$$

رابطهٔ ۲-۱۹ مشخصات نقطهٔ بحرانی را به‌دست می‌دهد. با توجه به این‌که T و A به y بستگی دارند، رابطهٔ ۲-۱۹ برحسب y قابل بیان بوده و با حل این رابطه مقدار عمق بحرانی به‌دست می‌آید. با قرار دادن V^2 به جای $\frac{Q^2}{A^2}$ در رابطهٔ فوق‌الذکر خواهیم داشت:

$$\frac{\alpha Q^2 T}{gA^3 \cos\theta} = 1 \Rightarrow \frac{\alpha V^2 T}{gA\cos\theta} = 1 \qquad (۲-۲۰)$$

و چون مقدار $\frac{A}{T}$ عمق هیدرولیکی می‌باشد لذا:

$$\frac{\alpha V^2}{gD\cos\theta} = 1 \qquad (۲-۲۱)$$

$$\frac{\alpha V^2}{gD\cos\theta} = 1 \Rightarrow \frac{V\sqrt{\alpha}}{\sqrt{gD\cos\theta}} = 1 \qquad (۲-۲۲)$$

رابطهٔ ۲-۲۳ شکل عدد فرود جریان در این گونه مقاطع را نشان می‌دهد:

$$Fr = \frac{V\sqrt{\alpha}}{\sqrt{gD\cos\theta}} \qquad (۲-۲۳)$$

Prozhefa.com

که براساس رابطهٔ ۲-۲۲ مقدار عدد فرود جریان در نقطهٔ بحرانی برابر واحد به‌دست می‌آید و مقدار انرژی مخصوص مینیمم در این حالت برابر است با:

$$E_{min} = y_c \cos^{۲}\theta + \frac{\alpha V_c^{۲}}{۲g} = y_c \cos^{۲}\theta + \frac{\alpha V_c^{۲} D_c \cos\theta}{۲gD_c \cos\theta}$$

$$E_{min} = y_c \cos^{۲}\theta + \frac{۱}{۲} D_c \cos\theta \qquad (۲۴-۲)$$

در صورتی‌که منحنی‌های $E - y$ برای دو مقدار $Q_۲$ و $Q_۱$ ترسیم گردند و $Q_۲ > Q_۱$ باشد، این منحنی‌ها مطابق شکل ۲-۲۱ ب نمایش داده خواهند شد یعنی اگر $Q_۲ > Q_۱$ باشد، به ازاء یک عمق ثابت مقدار انرژی معادل سرعت مربوط به دبی $Q_۲$ بیشتر خواهد بود و منحنی‌ها با افزایش Q به سمت راست متمایل خواهند شد.

قابل ذکر است که نقاط مینیمم این منحنی‌ها بر روی خط $y = \frac{۲}{۳}E$ قرار نخواهند گرفت بلکه این نقاط از رابطهٔ ۲-۲۴ تبعیت خواهند نمود.

مثال ۲-۱۰

نشان دهید که برای یک مقطع دلخواه به ازاء یک انرژی مخصوص ثابت $\bar{E}$ ما کزیمم دبی عبوری در عمق بحرانی پیش می‌آید. از نظر سهولت در عملیات ریاضی فرض نمایید که $\alpha = ۱$ و جریان در کانال با شیب کم برقرار است.

حل:

مقدار انرژی مخصوص برابر است با:

$$E = y + \frac{Q^{۲}}{۲gA^{۲}} \Rightarrow (E-y)\,۲gA^{۲} = Q^{۲} \Rightarrow Q = A\sqrt{۲g(E-y)}$$

منحنی $Q - y$ به ازاء انرژی مخصوصی برابر $\bar{E}$ مشابه شکل ۲-۱۵ الف قابل ترسیم است. در صورتی‌که به ازاء انرژی مخصوص ثابت $\bar{E}$ از Q نسبت به y مشتق گرفته شود:

$$\frac{dQ}{dy} = \sqrt{۲g(\bar{E}-y)}\,\frac{dA}{dy} - \frac{gA}{\sqrt{۲g(\bar{E}-y)}}$$

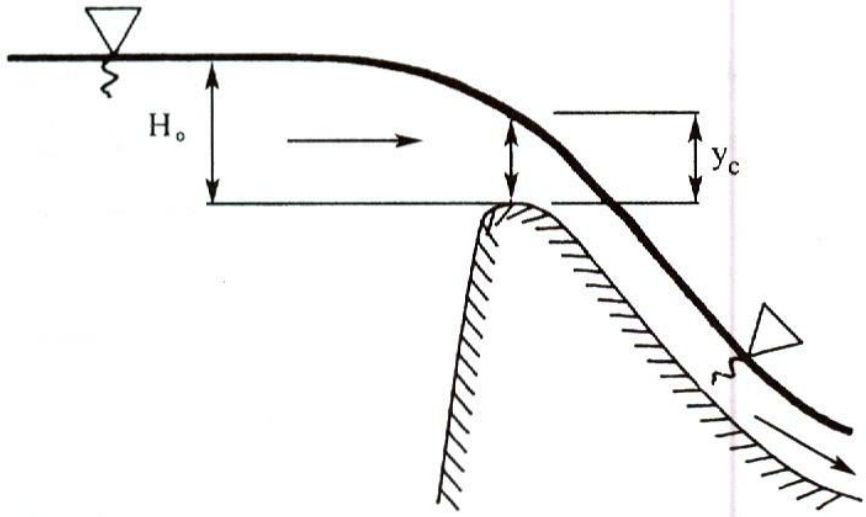
با توجه به این‌که $\frac{dA}{dy}$ برابر T و ضمناً Q برابر $A\sqrt{۲g(\bar{E}-y)}$ می‌باشد، با صفر قرار دادن $\frac{dQ}{dy}$ خواهیم داشت:

$$\frac{dQ}{dy} = ۰ \Rightarrow \frac{Q}{A}T - \frac{gA^{۲}}{Q} = ۰ \Rightarrow \frac{Q^{۲}T}{gA^{۳}} = ۱ \qquad (۲۵-۲)$$

Prozhefa.com

در مقایسه با رابطهٔ ۲-۱۹ و با توجه به فرضیات ساده کننده، ملاحظه می‌شود که رابطهٔ ۲-۲۵ مشخصات جریان بحرانی را نشان می‌دهد، لذا می‌توان گفت که به ازاء $\bar{E}$ ، Q_{max} در عمق بحرانی پیش می‌آید.

نتیجهٔ حاصل از مثال ۲-۱۰ را می‌توان با استفاده از شکل ۲-۲۲ توجیه فیزیکی نمود. در این شکل آب از دریاچه وارد یک کانال با شیب تند می‌گردد. اگر از سرعت نزدیک شدن و افت انرژی موضعی صرفنظر و سطح آب دریاچه ثابت فرض گردد مقدار انرژی مخصوص در بدو ورود به کانال ثابت و برابر H_o می‌باشد. در نتیجه در خروج از دریاچه جریان با ما کزیمم دبی که با عمق بحرانی همراه است صورت خواهد گرفت. تند بودن شیب به این معنی است که مقاومت بستر کانال نقش مؤثری در کنترل جریان نداشته، کنترل جریان از بالادست صورت می‌گیرد و جریان وضعیت رها شدن آزاد به داخل کانال را دارد. مفهوم تند بودن یا ملایم بودن شیب و اثر آن در کنترل جریان در فصل پنجم آورده خواهد شد.



شکل ۲-۲۲

۲-۷ محاسبات عمق بحرانی

در قسمت گذشتهٔ این فصل، در بررسی پدیده‌های موضعی در هیدرولیک کانالهای باز به‌اهمیت مقطع بحرانی در کنترل جریان و این‌که اندازه گیری عمق در این مقطع می‌تواند در اندازه گیری دبی در کانالهای باز کمک کند اشاره شد و در فصل سوم ضمن معرفی کاربرد اصل اندازهٔ حرکت در کانالهای باز، پاره‌ای دیگر از خصوصیات جریان بحرانی مطرح خواهد شد. به‌طور کلی می‌توان بیان نمود که در مقطع بحرانی :

Prozhefa.com

۱- عدد فرود جریان برابر یک است. در نتیجه سرعت متوسط جریان برابر سرعت حرکت موج سطحی ناشی از اغتشاش موضعی در کانال می‌باشد.

۲- به ازاء یک دبی ثابت، انرژی مخصوص مینیمم است.

۳- به ازاء یک انرژی مخصوص ثابت، دبی عبوری ماکزیمم است.

۴- به ازاء یک دبی ثابت، نیروی مخصوص مینیمم است.

۵- به ازاء یک نیروی مخصوص ثابت، دبی عبوری ماکزیمم است.

بندهای ۴ و ۵ از موارد ذکر شده با استفاده از اصل اندازهٔ حرکت در کانالهای باز توضیح داده خواهند شد.

بررسی پدیده‌های طولی در کانالهای باز و شکل‌گیری نیمرخهای سطح آب و عملکرد مقطع بحرانی به عنوان مقطع کنترل در این‌گونه جریانها مطالب دیگری است که موضوع فصول چهارم و پنجم این مجموعه را تشکیل می‌دهد و محاسبات عمق بحرانی ذکر شده در قسمت حاضر می‌تواند در این فصلها نیز مورد استفاده قرار گیرد.

منظور از محاسبات عمق بحرانی در یک کانال با هندسهٔ مشخّص، تعیین عمق بحرانی به ازاء یک دبی خاص می‌باشد. لذا رابطهٔ ۲-۱۹ باید برحسب y بیان شود و به ازاء دبی خاص عمق بحرانی محاسبه گردد. با قرار دادن عمق بحرانی در رابطهٔ ۲-۲۴ می‌توان انرژی مخصوص متناسب با این عمق را نیز محاسبه نمود.

حل معادلهٔ ۲-۱۹ و استخراج عمق بحرانی از آن همواره به صورت صریح صورت نمی‌گیرد و در بیشتر موارد نیاز به استفاده از یک روش عددی در تعیین عمق بحرانی می‌باشد و معمولاً با توجه به‌منحصر به فرد بودن جواب از روش آزمون و خطا استفاده می‌گردد، ولی سایر روشهای عددی نظیر روش نیوتن - رافسون نیز می‌توانند به کار گرفته شوند.

در هر حال در ادامه به آزمون و خطا به‌عنوان یک راه‌حل عمومی در حل معادلات اشاره خواهد شد و ضمناً از نمودارها و جداول کمکی نیز در جهت حل معادلهٔ ۲-۱۹ استفاده خواهد گردید. در انتها به عنوان تکمیل مطلب روش نیوتن - رافسون معرّفی خواهد شد و یک برنامهٔ کامپیوتری ساده در حل معادلهٔ ۲-۱۹ با استفاده از این روش نیز ارائه خواهد گردید.

در این راستا ابتدا حل معادلهٔ ۲-۱۹ به صورت $\frac{Q^2}{g} = \frac{A^3}{T}$ یعنی با فرض برقراری جریان در کانال با شیب کم و $\alpha = 1$ که فرضیات عمومی در حل مسایل عملی هستند صورت می‌گیرد. سپس در قالب مثالهای عددی دیده می‌شود که وارد کردن ثابتهای α و $\cos\theta$ در محاسبات و در استفاده از نمودارهای کمکی تغییری ایجاد نخواهد کرد. اشکال مختلفی که می‌توانند به عنوان مقطع جریان مورد نظر قرار گیرند، عبارتند از مقاطع مستطیلی، مثلثی، ذوزنقه‌ای، دایروی و مقطع با هندسهٔ نامنظم (شکل ۲-۲۳) که محاسبات مربوطه ذیلاً خواهد آمد.

۱- مقطع مستطیلی: با توجه به شکل ۲-۲۳ الف و با استفاده از رابطهٔ ۲-۱۹ می‌توان نوشت:

Prozhefa.com

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c} \Rightarrow \frac{Q^2}{g} = \frac{b^3 y_c^3}{b} \Rightarrow y_c = \left(\frac{Q^2}{b^2 g}\right)^{1/3} = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}$$

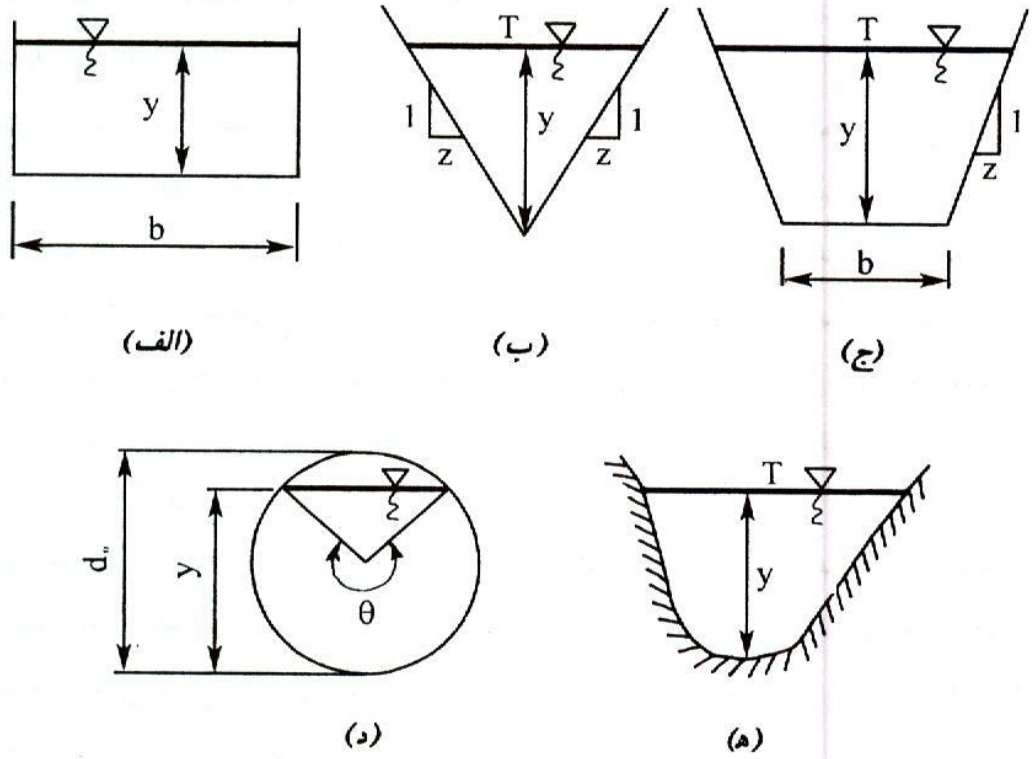
$$E_{min} = y_c + \frac{1}{2} D_c = y_c + \frac{1}{2} y_c = \frac{3}{2} y_c$$

و عدد فرود جریان نیز به صورت زیر بیان می‌شود:

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}} = \frac{V}{\sqrt{gy}}$$

۲- مقطع مثلثی : در مقطع مثلثی نمایش داده شده در شکل ۲-۲۳ ب، پارامترهای هندسی مساحت مقطع، عرض سطح آزاد و عمق هیدرولیکی به صورت زیر بیان می‌گردند:

$$A = zy^2 \qquad T = 2zy \qquad D = \frac{A}{T} = \frac{y}{2}$$



(الف) (ب) (ج) (د) (ه)

شکل ۲-۲۳

با توجه به شرط بحرانی بودن مقطع می‌توان نوشت :

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{T_c} \Rightarrow \frac{Q^2}{g} = \frac{z^3 y_c^6}{2zy_c} \Rightarrow y_c = \left(\frac{2Q^2}{gz^2}\right)^{1/5}$$

$$E_{min} = y_c + \frac{1}{2}\left(\frac{y_c}{2}\right) = 1{,}25\, y_c$$

و عدد فرود جریان نیز که در شرایط بحرانی برابر واحد است به صورت زیر نوشته می‌شود:

Prozhefa.com

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}} = \frac{V}{\sqrt{\frac{gy}{۲}}} = \frac{V\sqrt{۲}}{\sqrt{gy}}$$

۳- مقطع ذوزنقه‌ای: با استفاده از شکل ۲-۲۳ ج در این مقطع نیز می‌توان نوشت:

$$A = (b + zy)y \qquad T = b + ۲zy \qquad D = \frac{(b + zy)y}{b + ۲zy}$$

با توجه به مشخصات هندسی این کانال، حل رابطهٔ ۲-۱۹ نمی‌تواند به‌صورت صریح صورت گیرد و لذا می‌توان در حالت کلی روش عددی آزمون و خطا را در حل معادلهٔ مذکور به کار برد. روش زیر که یک روش ترسیمی است نیز می‌تواند در حل معادلهٔ مورد استفاده قرار گیرد. برای این منظور پارامتر هندسی دیگری که فاکتور سطح در محاسبهٔ عمق بحرانی نامیده می‌شود و در جدول ۱-۱ آورده شده است، بر حسب سایر مشخصات هندسی به صورت زیر معین می‌گردد:

$$Z = A\sqrt{\frac{A}{T}} = A\sqrt{D} = \frac{[(b+zy)y]^{۳/۲}}{(b+۲zy)^{۱/۲}}$$

$$\frac{Z}{b^{۲/۵}} = \frac{\left[\left(۱+\frac{zy}{b}\right)\left(\frac{y}{b}\right)\right]^{۱/۵}}{\left(۱+\frac{۲zy}{b}\right)^{۰/۵}} = g\left(\frac{y}{b}, z\right)$$

مقدار $\frac{Z}{b^{۲/۵}}$ پارامتر بدون بعدی است که برحسب $\frac{y}{b}$ و z قابل ترسیم است که این ترسیم در نمودار ۲-۱ صورت گرفته است. از این نمودار می‌توان با توجه به رابطهٔ ۲-۱۹ به صورت زیر در تعیین عمق بحرانی استفاده نمود:

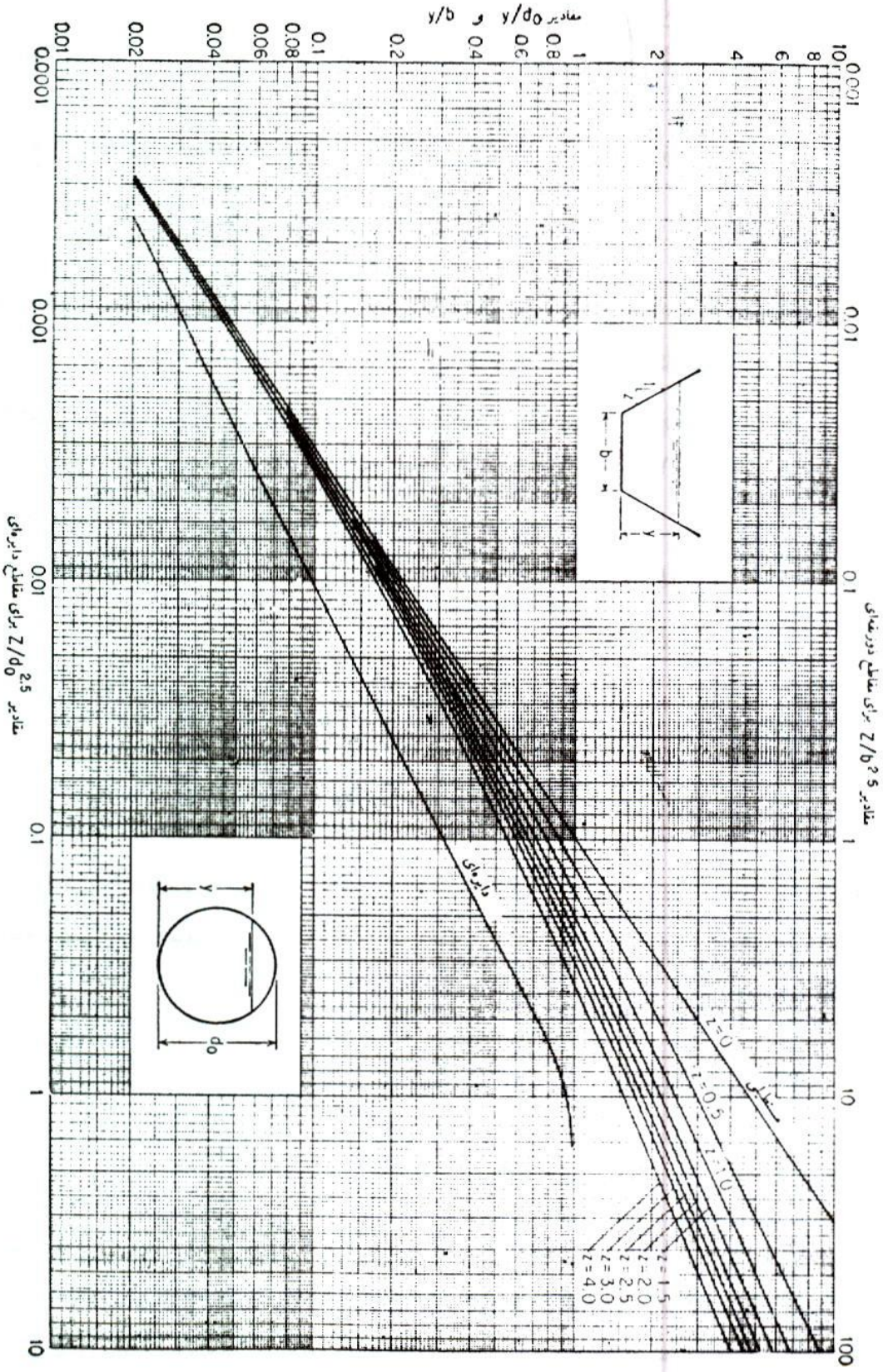
$$\frac{Q^۲}{g} = \frac{A_c^۳}{T_c} \Rightarrow \frac{Q}{\sqrt{g}} = Z_c$$

$$\frac{Q}{\sqrt{g}b^{۲/۵}} = \frac{Z_c}{b^{۲/۵}} \qquad (۲۶-۲)$$

در تعیین عمق بحرانی می‌توان مقدار $\frac{Z_c}{b^{۲/۵}}$ به ازاء دبی خاص را با توجه به رابطهٔ ۲-۲۶ به‌دست آورد و سپس با استفاده از نمودار ۲-۱ به ازاء z مشخص مقدار $\frac{y_c}{b}$ و یا به عبارت دیگر عمق بحرانی را تعیین نمود.

با داشتن y_c می‌توان مقدار D_c و با توجه به رابطهٔ ۲-۲۴ مقدار E_{min} راتعیین نمود. عدد فرود نیز در هر عمق از جریان با توجه رابطهٔ کلی ۲-۲۳ به‌دست خواهد آمد.

Prozhefa.com



نمودار ۲ - ۱ محاسبهٔ عمق بحرانی در کانالهای ذوزنقه‌ای و دایروی

Prozhefa.com

۴-مقطع دایروی: در مقاطع دایروی (شکل ۲-۲۳ د) نیز می‌توان ارتباط هندسی زیر را مشخص نمود:

$$\theta = ۲\cos^{-۱}\left(۱ - \frac{۲y}{d_۰}\right) = f\left(\frac{y}{d_۰}\right)$$

چنانچه پارامتر هندسی Z که از جدول ۱-۱ قابل استخراج می‌باشد به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$Z = A\sqrt{D} = \frac{\sqrt{۲}}{۳۲}\frac{(\theta - \sin\theta)^{۱/۵}}{\left(\sin\frac{\theta}{۲}\right)^{۰/۵}} d_۰^{۲/۵}$$

یا:

$$\frac{Z}{d_۰^{۲/۵}} = \frac{\sqrt{۲}}{۳۲}\frac{(\theta - \sin\theta)^{۱/۵}}{\left(\sin\frac{\theta}{۲}\right)^{۰/۵}} = g\left(\frac{y}{d_۰}\right)$$

می‌توان با استفاده از نمودار ۲-۱، که در آن $\frac{Z}{d_۰^{۲/۵}}$ در برابر $\frac{y}{d_۰}$ برای مقاطع دایروی ترسیم گردیده است، محاسبات مربوطه را دنبال نمود. با توجه به بحرانی بودن مقطع می‌توان به ازاء دبی داده شده مقدار Z را مشخص نموده و سپس عمق بحرانی را تعیین کرد:

$$\frac{Q^۲}{g} = \frac{A_c^۳}{T_c} \Rightarrow \frac{Q}{\sqrt{g}} = A_c\sqrt{D_c} = Z_c$$

$$\frac{Q}{\sqrt{g}d_۰^{۲/۵}} = \frac{Z_c}{d_۰^{۲/۵}}$$

لذا به ازاء هر دبی خاص، پارامتر $\frac{Z_c}{d_۰^{۲/۵}}$ محاسبه می‌شود و از روی نمودار ۲-۱ عمق بحرانی مربوطه به‌دست خواهد آمد.

۵- مقطع نامنظم: در کانالهائی که شکل هندسی مشخص ندارند (شکل ۲-۲۳ ه) برای تعیین عمق بحرانی می‌توان از روش ترسیمی شرح داده شده در ذیل استفاده نمود:

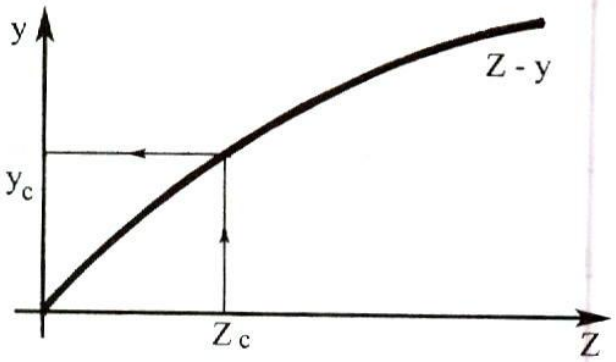
مقادیر دلخواهی برای y انتخاب نموده، سپس با توجه به شکل مقطع، مقدار Z مشخص می‌شود و لذا می‌توان منحنی شکل ۲-۲۴ را برای این مقطع خاص ترسیم کرد.

با توجه شرایط بحرانی رابطهٔ زیر را داریم:

$$\frac{Q^۲}{g} = \frac{A_c^۳}{T_c} \Rightarrow \frac{Q}{\sqrt{g}} = Z_c$$

که با داشتن Q مقدار Z_c به‌دست خواهد آمد و می‌توان با استفاده از منحنی شکل ۲-۲۴، عمق بحرانی را تعیین نمود. با تعیین y_c، D_c و درنتیجه E_{min} متناسب با وضعیت بحرانی به‌دست می‌آید.

Prozhefa.com



شکل ۲-۲۴

واضح است که این روش یک روش ترسیمی در حل معادلهٔ ۲-۱۹ می‌باشد و می‌توان آنرا در مورد مقاطع با اشکال منظم هندسی نیز به کاربرد.

مثال ۲-۱۱

آب با دبی $5 m^3/s$ در کانالهای فرضی زیر جاری می‌باشد. عمق بحرانی و انرژی مخصوص متناسب با آن را پیدا نمایید:

الف) کانال مستطیلی با عرض کف ۲ متر $(b = ۲/۰ m)$

ب) کانال مثلثی با $z = ۱/۵$

ج) کانال دایروی با $d_0 = ۲/۰ m$

د) کانال ذوزنقه‌ای با $z = ۱/۵$ ، $b = ۲/۰ m$ و $\alpha = ۱/۲$

حل:

الف)

$$Q = ۵\ m^3/s \Rightarrow q = \frac{۵}{۲} = ۲/۵\ \frac{m^3}{s.m}$$

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} = \left(\frac{۲/۵۲}{۹/۸۱}\right)^{1/3} = ۰/۸۶\ m$$

$$E_{min} = \frac{۳}{۲} y_c = ۱/۵ \times ۰/۸۶ = ۱/۲۹\ m$$

ب) مطابق روابط استخراج شده برای مقطع مثلثی می‌توان نوشت:

$$y_c = \left(\frac{۲Q^2}{gz^2}\right)^{1/5} = \left(\frac{۲ \times ۵^2}{۹/۸۱ \times ۰/۵^2}\right)^{1/5} \Rightarrow y_c = ۱/۸۲۸\ m$$

$$E_{min} = ۱/۲۵\ y_c = ۱/۲۵ \times ۱/۸۲۸ = ۲/۲۸۴\ m$$

Prozhefa.com

ج) حل این قسمت با استفاده از نمودار ۲-۱ صورت می‌گیرد :

$$\frac{Z_c}{d_\circ^{۲/۵}} = \frac{Q}{\sqrt{g}\, d_\circ^{۲/۵}} = \frac{۵}{\sqrt{۹/۸۱} \times ۲^{۲/۵}} = ۰/۲۸$$

$$\frac{Z_c}{d_\circ^{۲/۵}} = ۰/۲۸ \xrightarrow{\text{نمودار ۲-۱}} \frac{y_c}{d_\circ} = ۰/۵۴ \Rightarrow y_c = ۱/۰۸ \text{ m}$$

$$\frac{y_c}{d_\circ} = ۰/۵۴ \Rightarrow \theta_c = ۲ \cos^{-۱} (۱ - ۲ \times ۰/۵۴) = ۳/۳۰۲ \text{ rad}$$

در نتیجه با استفاده از جدول ۱-۱، می‌توان D_c را تعیین نمود:

$$D_c = \frac{۱}{۸} \left(\frac{۳/۳۰۲ - \sin ۳/۳۰۲}{\sin \frac{۳/۳۰۲}{۲}} \right)^۲ = ۰/۸۶۸ \text{m}$$

$$E_{min} = y_c + \frac{۱}{۲} D_c = ۱/۰۸ + \frac{۱}{۲} \times ۰/۸۶۸ = ۱/۵۱۴ \text{ m}$$

د) در این قسمت ضریب تصحیح مربوط به انرژی جنبشی برابر ۱/۲ در نظر گرفته شده است. تحت این شرایط مقدار Z_c با در نظر گرفتن α به صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$\frac{\alpha Q^۲}{g} = \frac{A_c^۳}{T_c} \Rightarrow \frac{Q\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g}} = Z_c \Rightarrow \frac{Z_c}{b^{۲/۵}} = \frac{Q\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g}\, b^{۲/۵}}$$

$$\frac{Z_c}{b^{۲/۵}} = \frac{۵ \times \sqrt{۱/۲}}{\sqrt{۹/۸۱}\, ۲^{۲/۵}} = ۰/۳۰۷ \qquad \xrightarrow[z = ۱/۵]{\text{نمودار ۲-۱}} \qquad \frac{y_c}{b} = ۰/۳۸$$

$$y_c = ۰/۳۸ \times ۲ = ۰/۷۶ \text{ m}$$

$$y_c = ۰/۷۶ \text{ m} \xrightarrow{\text{جدول ۱-۱}} D_c = \frac{(۲ + ۱/۵ \times ۰/۷۶) ۰/۷۶}{۲ + ۲ \times ۱/۵ \times ۰/۷۶} = ۰/۵۵۸$$

$$E_{min} = y_c + \frac{۱}{۲} D_c = ۰/۷۶ + \frac{۱}{۲} \times ۰/۵۵۸ = ۱/۰۴ \text{ m}$$

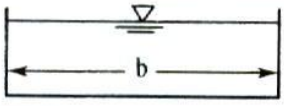
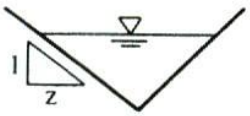
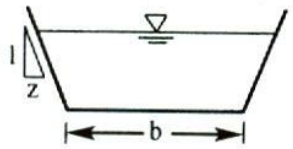
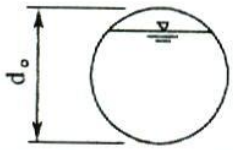
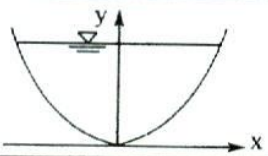
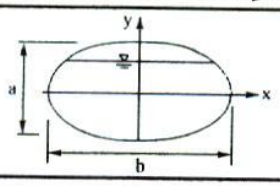
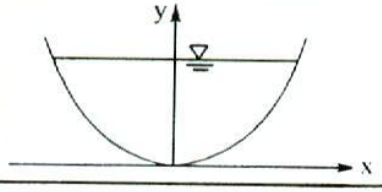
نکته‌ای که در رابطه با کانالهای ذوزنقه‌ای باید در نظر گرفته شود این است که در مقاطع ذوزنقه‌ای با توجه به اثر جوانب کانال، عمق بحرانی مقداری کمتر از عمق بحرانی برای مقاطع مستطیلی با عرض کف مشابه به‌دست می‌آید. لذا در صورت عدم دسترسی به نمودارهای کمکی، هنگام به کار بردن روش جبری آزمون و خطا، می‌توان نزدیکی دو عمق را در نظر گرفت.

Prozhefa.com

یک روش در تخمین سریعتر عمق بحرانی، استفاده از روابط نیمه تجربی می‌باشد. مجموعه‌ای از این روابط که توسط Straub (۱۹۸۲) پیشنهاد گردیده در جدول ۲-۱ آورده شده است. قابل ذکر است که این روابط تنها در محدودهٔ خاصی که در ستون ملاحظات جدول مشخص گردیده است، اعتبار دارند.

جدول ۲-۱ روابط نیمه تجربی در تعیین y_c

$$\Psi = \frac{\alpha Q^2}{g}$$

نوع کانال	توابع عمق بحرانی برحسب Ψ	ملاحظات
	$\left(\frac{\Psi}{b^2}\right)^{1/3}$	
	$\left(\frac{2\Psi}{z^2}\right)^{0/2}$	
	$0/81\left(\frac{\Psi}{z^{0/75}b^{1/25}}\right)^{0/27} - \frac{b}{30z}$	محدودهٔ کاربرد: $0/06 < Q/b^{2/5} < 2/2$ برای $0/06 > Q/b^{2/5}$ معادلهٔ مقطع مستطیلی را به کار ببرید.
	$\left(\frac{1/01}{d_o^{0/26}}\right)\Psi^{0/25}$	محدودهٔ کاربرد: $0/02 \le y_c/d_o \le 0/85$
	$(0/84\ c\Psi)^{0/25}$	معادلهٔ منحنی $y = cx^2$
	$0/84b^{0/22}\left(\frac{\Psi}{a^2}\right)^{0/25}$	محدودهٔ کاربرد: $0/05 \le \frac{y_c}{2b} \le 0/85$
	$\left(\frac{m^3\ \Psi c^2 m^{-2}}{4}\right)^{1/(2m-1)}$	معادلهٔ منحنی $y = cx^{1/(m-1)}$

Prozhefa.com

مثال ۲-۱۲

آب با دبی $5m^3/s$ در کانالهای فرضی زیر جاری می‌باشد. عمق بحرانی و انرژی مخصوص متناسب با آن را با استفاده از روابط Straub پیدا نمایید.

الف) کانال دایروی $d_0 = ۲/۰\ m \quad \alpha = ۱$

ب) کانال ذوزنقه‌ای $\alpha = ۱/۲ \quad b = ۲/۰ m \quad z = ۱/۵$

حل

قسمت الف:

از جدول ۲-۱ داریم:

$$\Psi = \frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{۵^2}{۹/۸۱} = ۲/۵۴۸$$

$$y_c = \left(\frac{۱/۰۱}{d_0^{۰/۲۶}}\right)\Psi^{۰/۲۵}$$

$$y_c = \left(\frac{۱/۰۱}{۲^{۰/۲۶}}\right)۲/۵۴۸^{۰/۲۵} = ۱/۰۶ m$$

$\frac{y_c}{d_0}$ برابر ۰/۵۳ می‌باشد که در محدودهٔ ۰/۰۲ تا ۰/۸۵ قرار دارد.

جواب $y_c = ۱/۰۶$ به جواب قسمت ج مثال ۲-۱۱ نزدیک می‌باشد.

حل قسمت ب:

$$\Psi = \frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{۱/۲ \times ۲۵}{۹/۸۱} = ۳/۱۸۵$$

$$y_c = ۰/۸۱ \left(\frac{\Psi}{z^{۰/۷۵} b^{۱/۲۵}}\right)^{۰/۲۷} - \frac{b}{۳۰z} \qquad (۲۷-۲)$$

$$y_c = ۰/۸۱ \left(\frac{۳/۱۸۵}{۱/۵^{۰/۷۵} \times ۲^{۱/۲۵}}\right)^{۰/۲۷} - \frac{۲}{۳۰ \times ۱/۵} \approx ۰/۷۵ m$$

باتوجه به‌جدول ۲-۱ دیده‌می‌شودکه‌به کار بردن رابطهٔ ۲-۲۲ در محدودهٔ $\frac{Q}{b^{۲/۵}} < ۲/۲$ و $> ۰/۰۶$ اعتبار دارد و در این مثال $\frac{Q}{b^{۲/۵}}$ برابر ۰/۸۸ می‌باشد که محدودهٔ لازمه را ارضاء می‌نماید و جواب به‌دست آمده با جواب حاصل در قسمت «د» مثال ۲-۱۱ نزدیکی لازم را دارد.

مثال ۲-۱۳

در دو حالت زیر عرض کف را به گونه‌ای محاسبه نمایید که کانال دبی $۱۵m^3/s$ را با عمق بحرانی $۱/۲m$ جریان دهد.

Prozhefa.com

الف: کانال مستطیلی

ب: کانال ذوزنقه‌ای با شیب کناره $z = ۱/۵$

حل

الف: در مقطع مستطیلی شکل روابط به صورت زیر می‌باشند:

$$y_c = \left(\frac{q^۲}{g}\right)^{۱/۳} \Rightarrow ۱/۲ = \left(\frac{q^۲}{۹/۸۱}\right)^{۱/۳} \Rightarrow q = ۴/۱۱۷ \ \mathrm{m^۳/s.m}$$

$$q = \frac{Q}{b} \Rightarrow ۴/۱۱۷ = \frac{۱۵}{b} \Rightarrow b = ۳/۶۴۳ \ \mathrm{m}$$

حل ب: در کانال ذوزنقه‌ای شرط بحرانی بودن مقطع به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{Q^۲}{g} = \frac{A_c^۳}{T_c}$$

$$A_c = (b + ۱/۵ \times ۱/۲)۱/۲ = (b + ۱/۸)۱/۲$$

$$T_c = (b + ۲ \times ۱/۵ \times ۱/۲) = (b + ۳/۶)$$

$$\frac{۱۵^۲}{۹/۸۱} = \frac{(b + ۱/۸)^۳ \times ۱/۲^۳}{b + ۳/۶} \qquad (۲-۲۸)$$

از حل رابطهٔ ۲-۲۸ و با استفاده از روش آزمون و خطا مقدار b به‌دست خواهد آمد:

آزمون و خطا $\rightarrow$ $b = ۲/۵۳۵ \ \mathrm{m}$

مثال ۲-۱۴

در یک کانال ذوزنقه‌ای به عرض کف ۲/۰m و شیب کناره‌های ۱:۱ عمق بحرانی و نیز ما کزیمم دبی عبوری در این حالت را برای انرژی مخصوصی معادل ۱/۵m پیدا نمایید.

حل:

در کانال ذوزنقه‌ای روابط زیر برقرار است:

$$E_{min} = y_c + \frac{۱}{۲} D_c$$

$$۱/۵ = y_c + \frac{(۲ + y_c)y_c}{۲(۲ + ۲y_c)} \xrightarrow{\text{آزمون و خطا}} y_c = ۱/۰۹۵ \ \mathrm{m}$$

در شرایط بحرانی می‌توان نوشت:

$$E_{min} = y_c + \frac{۱}{۲} D_c = y_c + \frac{V_c^۲}{۲g} \Rightarrow \frac{V_c^۲}{۲g} = \frac{۱}{۲} D_c$$

$$\frac{V_c^۲}{۲g} = (۱/۵ - ۱/۰۹۵) \Rightarrow V_c = ۲/۸۲ \ \mathrm{m/s}$$

Prozhefa.com

$$A_c = (۲ + ۱/۰۹۵)۱/۰۹۵ = ۳/۳۹\ \text{m}^۲$$

$$Q_{max} = V_c A_c = ۲/۸۲ \times ۳/۳۹ = ۹/۵۰۵\ \text{m}^۳/\text{s}$$

توجیه فیزیکی این مثال می‌تواند با توجه به شکل ۲-۲۲ صورت پذیرد که بر این اساس مقدار $H_۰$ برابر E_{min} یعنی ۱/۵m، عمق آب در خروج از دریاچه برابر عمق بحرانی (۱/۰۹۵m) و دبی جریان یافته به کانال با شیب تند فرضی نیز معادل ۹/۵۰۵m^۳/s می‌باشد.

مثال ۲-۱۵

در قسمتی از مسیر یک کانال جمع‌آوری فاضلاب با مقطع دایروی حداکثر دبی جریان ۱۷۰ لیتر در ثانیه و حداقل آن ۱۰ لیتر در ثانیه تعیین شده است. در زمان حداکثر دبی عمق بحرانی محاسبه و ۲۳ سانتی‌متر به‌دست آمده است. اگر در زمان حداقل دبی در همان قسمت عمق جریان ۱۰ سانتی‌متر باشد وضعیت جریان را تعیین نمایید.

حل:

با توجه به اطلاعات مسأله از میزان عمق بحرانی در زمان دبی حداکثر، می‌توان قطر کانال را محاسبه نمود. محاسبهٔ قطر نیاز به آزمون و خطا دارد و راه مناسب در انجام آزمون و خطا استفاده از نمودار ۲-۱ می‌باشد.

از نظر سهولت می‌توان مسأله را با توابع عمق بحرانی پیشنهادی Straub حل و جواب حاصل را با نمودار ۲-۱ نیز کنترل نمود.

$$\Psi = \frac{\alpha Q^۲}{g} = \frac{۰/۱۷^۲}{۹/۸۱} = ۰/۰۰۲۹۵$$

$$y_c = \left(\frac{۱/۰۱}{d_۰^{۰/۲۶}}\right)\Psi^{۰/۲۵}$$

$$۰/۲۳ = \left(\frac{۱/۰۱}{d_۰^{۰/۲۶}}\right)(۰/۰۰۲۹۵)^{۰/۲۵} \rightarrow d_۰ = ۱/۰۹۳\ \text{m}$$

با توجه به این‌که $\frac{y_c}{d_۰} = ۰/۲۱$ می‌باشد، محدودهٔ $۰/۰۲ < \frac{y_c}{d_۰} < ۰/۸۵$ ارضاء گردیده، جواب $d_۰ = ۱/۰۹۳\text{m}$ قابل قبول است.

در صورتی‌که از نمودار ۲-۱ در جهت آزمون و خطا استفاده شود، می‌توان ابتدا مقداری برای $d_۰$ حدس زد و سپس از روی عبارت $\frac{Z_c}{d_۰^{۲/۵}}$ مقدار y_c را از نمودار به‌دست آورد و تا زمانی‌که y_c برابر ۲۳ سانتیمتر به‌دست آید آزمون و خطا را تکرار نمود. مقدار $d_۰$ اولیه و به منظور کنترل روش قبل ۱/۰۹۳m انتخاب می‌گردد:

$$d_۰ = ۱/۰۹۳\ \text{m}$$

Prozhefa.com

$$\frac{Z_c}{d_\circ^{۲/۵}} = \frac{Q}{\sqrt{g}\,d_\circ^{۲/۵}} = \frac{۰/۱۷}{\sqrt{۹/۸۱}(۱/۰۹۳)^{۲/۵}} = ۰/۰۴۳$$

$$\frac{Z_c}{d_\circ^{۲/۵}} = ۰/۰۴۳ \xrightarrow{\text{نمودار ۲-۱}} \frac{y_c}{d_\circ} = ۰/۲۱$$

$$\frac{y_c}{d_\circ} = ۰/۲۱ \rightarrow y_c = ۰/۲۱ \times ۱/۰۹۳ = ۰/۲۳ \text{ m}$$

با توجه به این‌که قطر کانال دایروی ۱/۰۹۳m می‌باشد، می‌توان به ازاء دبی حداقل نیز عمق‌بحرانی را تعیین نمود. مقایسه عمق بحرانی با عمق جریان (۱۰ سانتیمتر) وضعیت جریان را در دبی حداقل مشخص خواهد کرد.

$$\frac{Z_c}{d_\circ^{۲/۵}} = \frac{Q}{\sqrt{g}\,d_\circ^{۲/۵}} = \frac{۰/۰۱}{\sqrt{۹/۸۱}(۱/۰۹۳)^{۲/۵}} = ۰/۰۰۲۶$$

$$\frac{Z_c}{d_\circ^{۲/۵}} = ۰/۰۰۲۶ \xrightarrow{\text{نمودار ۲-۱}} \frac{y_c}{d_\circ} = ۰/۰۵$$

$$\frac{y_c}{d_\circ} = ۰/۰۵ \rightarrow y_c = ۰/۰۵ \times ۱/۰۹۳ = ۰/۰۵۵ \text{ m}$$

در این کانال به ازاء دبی حداقل، عمق جریان ۱۰ سانتیمتر می‌باشد که از عمق بحرانی بیشتر بوده و لذا در جریان حداقل، وضعیت جریان زیر بحرانی می‌باشد.

مثال ۲-۱۶

در یک کانال دایروی آب با دبی $۵m^3/s$ جریان دارد:

الف) قطر کانال را به نحوی تعیین نمایید که عمق بحرانی ۲۰ سانتیمتر کمتر از قطر کانال باشد.

ب) قطر کانال را به نحوی تعیین نمایید که عمق بحرانی برابر شعاع کانال باشد.

حل

قسمت الف: به منظور پیدا کردن قطر، باید روابط ۲-۲۹ و ۲-۳۰ به طور همزمان برقرار باشند:

$$\frac{Q^۲}{g} = \frac{A^۳}{T} \qquad (۲-۲۹)$$

$$d_\circ = y_c + ۰/۲ \qquad (۲-۳۰)$$

به‌جای روابط فوق، می‌توان از رابطهٔ ۲-۳۰ و نیز نمودار ۲-۱ استفاده نمود:

$$\frac{Z_c}{d_\circ^{۲/۵}} = \frac{Q}{\sqrt{g}\,d_\circ^{۲/۵}} \qquad (۲-۳۱)$$

Prozhefa.com

$$d_\circ = y_c + \circ/۲ \qquad (۳۰-۲)$$

ابتدا مقداری برای قطر کانال حدس زده شده، با استفاده از نمودار ۲-۱ مقدار y_c تعیین می‌شود. برقراری رابطهٔ ۲-۳۰ جواب مناسب $d_\circ$ را مشخص خواهد نمود.

$$d_\circ = ۱/۲\text{m} \rightarrow \frac{Z_c}{d_\circ^{۲/۵}} = \frac{Q}{\sqrt{۹/۸۱}(۱/۲)^{۲/۵}} = ۱/\circ ۱۲$$

$$\frac{Z_c}{d_\circ^{۲/۵}} = ۱/\circ ۱۲ \xrightarrow{\text{نمودار ۲-۱}} \frac{y_c}{d_\circ} = \circ/۹۴$$

$$\frac{y_c}{d_\circ} = \circ/۹۴ \rightarrow y_c = ۱/۲ \times \circ/۹۴ = ۱/۱۳\ \text{m}$$

با توجه به این‌که رابطهٔ ۲-۳۰ برقرار نمی‌باشد، مقدار قطر در آزمون بعدی افزایش می‌یابد:

$$d_\circ = ۱/۳۸\text{m} \rightarrow \frac{Z_c}{d_\circ^{۲/۵}} = \frac{۵}{\sqrt{۹/۸۱}(۱/۳۸)^{۲/۵}} = \circ/۷۱۴$$

$$\frac{Z_c}{d_\circ^{۲/۵}} = \circ/۷۱۴ \xrightarrow{\text{نمودار ۲-۱}} \frac{y_c}{d_\circ} = \circ/۸۵$$

$$y_c = \circ/۸۵ \times ۱/۳۸ = ۱/۱۷۳\ \text{m}$$

با این محاسبه تفاوت قطر و عمق بحرانی برابر $\circ/۲\circ۷\text{m}$ به‌دست می‌آید که با توجه به دقت استفاده از نمودار، قطر برابر $۱/۳۸\text{m}$ انتخاب می‌گردد.

اضافه می‌نماید که نظر به محدودیت قطرهای موجود در بازار، دقت بالای محاسبات از نظر کاربردی چندان ضروری نمی‌باشد.

حل قسمت ب : در این قسمت عمق بحرانی برابر نصف قطر کانال می‌باشد پس :

$$y_c = \frac{۱}{۲}d_\circ \rightarrow \frac{y_c}{d_\circ} = \circ/۵$$

$$\frac{y_c}{d_\circ} = \circ/۵ \xrightarrow{\text{نمودار ۲-۱}} \frac{Z_c}{d_\circ^{۲/۵}} = \frac{Q}{\sqrt{g}\,d_\circ^{۲/۵}} = \circ/۲۵$$

$$\frac{۵}{\sqrt{۹/۸۱}\,d_\circ^{۲/۵}} = \circ/۲۵ \rightarrow d_\circ \approx ۲/۱\text{m}$$

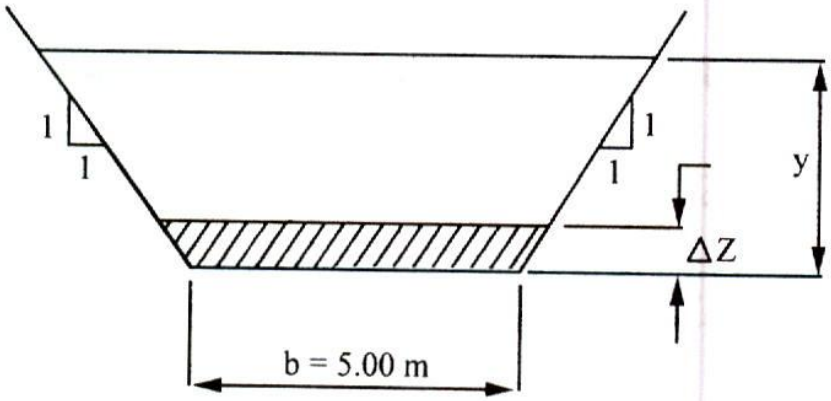
Prozhefa.com

مثال ۲-۱۷

آب در یک کانال ذوزنقه‌ای به عرض ۵/۰m و شیب کناره‌های ۱:۱ با عمق ۱/۵m و سرعت ۱/۰m/s جاری است:

الف) حداقل ارتفاع برآمدگی هموار در کف کانال برای رسیدن به عمق بحرانی را محاسبه نمایید.

ب) در صورتی‌که ارتفاع برآمدگی نصف حالت الف باشد، عمق جریان بر روی برآمدگی را تعیین نمایید.



شکل ۲-۲۵

حل:

ابتدا وضعیت جریان در بالادست برآمدگی تعیین می‌شود:

$$A_1 = (b + zy_1)\, y_1 = (5 + 1/5)1/5 = 9/75\ \mathrm{m}^2$$

$$T_1 = (b + 2zy_1) = (5 + 2 \times 1/5) = 8/0\ \mathrm{m}$$

$$D_1 = \frac{A_1}{T_1} = \frac{9/75}{8} = 1/22\ \mathrm{m}$$

$$Q = V_1 A_1 = 9/75 \times 1 = 9/75\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

$$Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gD_1}} = \frac{1/0}{\sqrt{9/81 \times 1/22}} = 0/29 < 1$$

با توجه به این‌که عدد فرود کوچکتر از یک است، وضعیت جریان قبل از برآمدگی زیر بحرانی بوده، مقدار انرژی مخصوص در بالادست برآمدگی برابر است با:

Prozhefa.com

$$L_1 = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = 1/551 \text{ m}$$

الف - نوشتن معادلهٔ انرژی بین نقاط بالادست برآمدگی و روی برآمدگی، مقدار ΔZ_c را خواهد داد:

$$\Delta Z_c = E_1 - E_c \qquad (۳۲-۲)$$

محاسبهٔ E_c نیاز به تعیین عمق بحرانی دارد:

$$E_c = y_c + \frac{1}{2} D_c$$

عمق بحرانی بر روی برآمدگی با استفاده از نمودار ۲-۱ و با فرض این‌که عرض کف برابر ۵/۰m باشد تعیین می‌گردد:

$$\frac{Z_c}{b^{2/5}} = \frac{Q}{\sqrt{g} b^{2/5}} = \frac{9/75}{\sqrt{9/81}(5)^{2/5}} = 0/056$$

$$\frac{Z_c}{b^{2/5}} = 0/056 \xrightarrow[z=1]{\text{نمودار ۲-۱}} \frac{y_c}{b} = 0/135$$

$$y_c = 0/135 \times 5 = 0/675 \text{ m}$$

$$D_c = \frac{(5 + 0/675)0/675}{5 + 2 \times 0/675} = 0/603 \text{ m}$$

$$E_c = y_c + \frac{1}{2} D_c = 0/675 + \frac{1}{2}(0/603) = 0/977 \text{ m}$$

با توجه به رابطهٔ ۲-۳۲ مقدار ΔZ_c به‌دست می‌آید:

$$\Delta Z_c = 1/551 - 0/977 = 0/574 \text{ m}$$

بدیهی است فرض $b = 5/0\text{m}$ در محاسبهٔ عمق بحرانی صحیح نمی‌باشد، لذا عرض کف با توجه به مقدار ΔZ_c تصحیح گشته و مجدداً عمق بحرانی محاسبه می‌گردد:

$$b = 5 + 2\Delta Z_c = 5 + 2 \times 0/574 = 6/148 \text{ m}$$

$$\frac{Z_c}{b^{2/5}} = \frac{9/75}{\sqrt{9/81}(6/148)^{2/5}} = 0/0332$$

$$\frac{Z_c}{b^{2/5}} = 0/033 \xrightarrow[z=1]{\text{نمودار ۲-۱}} \frac{yc}{b} = 0/1$$

$$y_c = 0/1 \times 6/148 = 0/615 \text{ m}$$

$$D_c = \frac{(6/148 + 0/615)0/615}{6/148 + 2 \times 0/615} = 0/564 \text{ m}$$

Prozhefa.com

$$E_c = y_c + \frac{۱}{۲} D_c = ۰٫۶۱۵ + \frac{۱}{۲} \times ۰٫۵۶۴ \approx ۰٫۹ \text{ m}$$

$$\Delta Z_c = ۱٫۵۵۱ - ۰٫۹ = ۰٫۶۵۴ \text{ m}$$

با مقدار $\Delta Z_c = ۰٫۶۵۴\text{m}$ در سومین آزمون عمق بحرانی محاسبه می‌شود:

$$b = ۵ + ۲ \times ۰٫۶۵۴ = ۶٫۳۰۸ \text{ m}$$

$$\frac{Z_c}{b^{۲٫۵}} = \frac{۹٫۷۵}{\sqrt{۹٫۸۱}(۶٫۳۰۸)^{۲٫۵}} = ۰٫۰۳۱$$

$$\frac{Z_c}{b^{۲٫۵}} = ۰٫۰۳۱ \xrightarrow[z = ۱]{\text{نمودار ۱.۲}} \frac{y_c}{b} = ۰٫۰۹۹$$

$$y_c = ۰٫۰۹۹ \times ۶٫۳۰۸ = ۰٫۶۲۴ \text{ m}$$

$$D_c = \frac{(۶٫۳۰۸ + ۰٫۶۲۴) ۰٫۶۲۴}{۶٫۳۰۸ + ۲ \times ۰٫۶۲۴} = ۰٫۵۷۳ \text{ m}$$

$$E_c = y_c + \frac{۱}{۲} D_c = ۰٫۶۲۴ + \frac{۱}{۲} \times ۰٫۵۷۳ = ۰٫۹۱ \text{ m}$$

$$DZ_c = ۱٫۵۵۱ - ۰٫۹۱ = ۰٫۶۴ \text{ m}$$

با توجه به تغییر ناچیز مقدار ΔZ_c نسبت به آزمون دوم، مقدار ΔZ_c برابر ۰٫۶۴m پذیرفته می‌شود.

باید در نظر داشت که به جهت وضعیت زیر بحرانی در بالادست برآمدگی، در صورتی‌که ارتفاع برآمدگی بیش از ۰٫۶۴m انتخاب گردد، عمق بحرانی روی برآمدگی تثبیت خواهد شد ولی تغییر در عمق آب در بالادست جریان نیز ایجاد خواهد گردید. در حقیقت $\Delta Z_c = ۰٫۶۴\text{m}$ به معنی حداقل ارتفاع برآمدگی در ایجاد جریان بحرانی و حداکثر ارتفاع در عدم تغییر عمق در بالادست می‌باشد.

میزان پایین افتادگی سطح آب در محل برآمدگی برابر است با:

$$\Delta y = y_۱ - (y_c + \Delta Z_c) = ۱٫۵ - (۰٫۶۲۴ + ۰٫۶۴) = ۰٫۲۳۶ \text{ m}$$

ب:

$$\Delta Z = ۰٫۵ \Delta Z_c = ۰٫۵ \times ۰٫۶۴ = ۰٫۳۲ \text{ m}$$

با توجه به این‌که $\Delta Z < \Delta Z_c$ است. تغییر در شرایط بالادست ایجاد نخواهد شد:

$$E_۲ = E_۱ - \Delta Z$$

$$E_۲ = E_۱ - \Delta Z = ۱٫۵۵۱ - ۰٫۳۲ = ۱٫۲۳۱ \text{ m}$$

$$b_۱ = ۵ + ۲\Delta Z = ۵ + ۲ \times ۰٫۳۲ = ۵٫۶۴ \text{ m}$$

Prozhefa.com

$$E_۲ = y_۲ + \frac{V_۲^۲}{۲g} = y_۲ + \frac{Q^۲}{۲gA_۲^۲}$$

$$۱/۲۳۱ = y_۲ + \frac{(۹/۷۵)^۲}{۲ \times ۹/۸۱[(۵/۶۴ + y_۲)y_۲]^۲} \qquad (۲-۳۳)$$

حل رابطهٔ ۲-۳۳ با استفاده از آزمون و خطا و انتخاب مقادیر $۱/۵\text{m} > y_۲ > ۰/۶۲۴$ انجام می‌شود.

بدیهی است که $y_۲$ از ۱/۲۳۱m نیز کوچکتر می‌باشد (چرا؟):

آزمون و خطا $\rightarrow y_۲ = ۱/۱۵۵$ m

در این حالت هیچ تغییری در وضعیت جریان بالادست برآمدگی ایجاد نمی‌شود و میزان پایین‌افتادگی سطح آب در رسیدن به برآمدگی برابر است با:

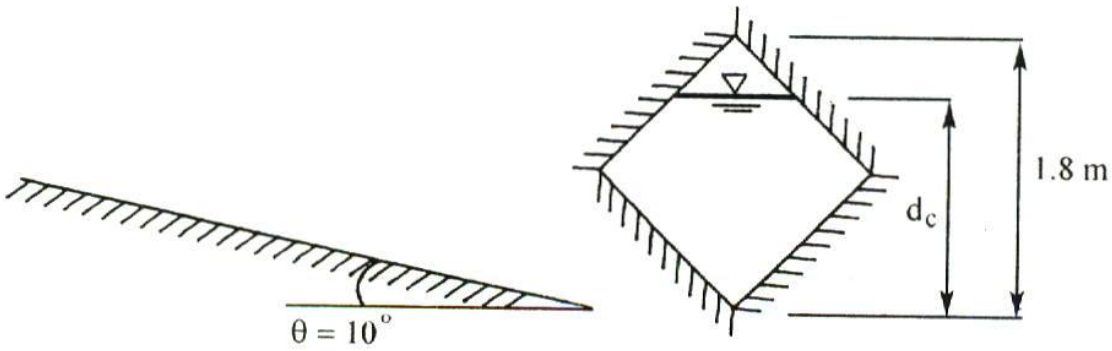
$$\Delta y = ۱/۵ - (۱/۱۵۵ + ۰/۳۲) = ۰/۰۲۵ \text{ m}$$

در صورتی‌که ارتفاع برآمدگی ۱/۲۵ برابر ارتفاع برآمدگی در حالت الف باشد، عمق آب در روی برآمدگی، قبل از برآمدگی و میزان پایین افتادگی در سطح آب چه مقدار خواهند بود(؟)

حل این وضعیت به عنوان تمرین به عهدهٔ مطالعه کنندگان گذاشته می‌شود.

مثال ۲-۱۸

آب با دبی $۲\text{m}^۳/\text{s}$ در یک کانال طولانی با مقطع مربع مطابق شکل زیر جاری است. اگر شیب طولی کانال ۱۰° و $\alpha = ۱/۱$ در نظر گرفته شوند، عمق بحرانی (y_c)، سرعت بحرانی (V_c) و نیز انرژی مخصوص متناسب با جریان را محاسبه نمایید.



شکل ۲-۲۶