جدول ۷-۶ دسته بندی بارش و فراوانی هر یک

بارش (mm)	فراوانی (day)
۱۱۸ -۱۲۶	۳
۱۲۷ -۱۳۵	۵
۱۳۶ -۱۴۴	۹
۱۴۵ -۱۵۳	۱۲
۱۵۴ -۱۶۲	۵
۱۶۳ -۱۷۱	۴
۱۷۲ -۱۸۰	۲

نما (Mode)

نما برای متغیرهای گسسته، بیشترین مقدار فراوانی است. برای داده های پیوسته، مقداری است که مقدار چگالی احتمال آن حداکثر باشد. مقدار نما به ویژه برای رخدادهای حدی (Extreme events) نظیر سیلاب ها و خشک سالی ها مهم است. وقتی توزیع فراوانی برای دسته های مختلف داده ها معلوم باشد، مقدار نما از روابط زیر به دست می آید:

$$\text{نما} = l + \frac{f - f_1}{(f - f_1) + (f - f_2)} \times C \qquad (۳۳-۷)$$

که l= حد پائینی دستهٔ نمایی، f= فراوانی حداکثر، f_1= فراوانی دستهٔ قبل از دستهٔ نمایی، f_2= فراوانی دسته بعد از دستهٔ نمایی، C= اندازهٔ دستهٔ نمایی هستند. در توزیع های متقارن، مقادیر میانگین حسابی، میانه و نما برابرند.

مثال ۷-۸: مطلوب است محاسبه نما برای داده های مثال (۷-۷).

حل: مقدار فروانی حداکثر ۱۲مربوط به دسته ۱۵۳-۱۴۵ است ولذا این دسته نمایی است.

$$I = 145 \ , \ f = 12 \ , \ f_1 = 9 \ , f_2 = 5 \ , \ c = 8$$

لذا بر اساس رابطه (۷-۳۳) داریم:

$$\text{نما} = 145 + \frac{12 - 9}{(12 - 9) + (12 - 5)} \times 8 = 147 \ (\text{mm})$$

۷-۳-۴ تغییرات حول تمایل مرکزی

واریانس (Variance)

میزان پراکندگی داده ها حول تمایل مرکزی را می توان با میزان انحرافات از میانگین داده ها سنجید. بر این اساس گشتاور مرتبه دوم حول میانگین از اهمیت ویژه ای برخوردار است. این آماره (پارامتر) واریانس نامیده شده و مقدار آن با علامت σ^2 به جای μ_2 به صورت زیر محاسبه می شود. جذر آن را انحراف معیار (Standard Deviation-StdDev) نامند.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2 \qquad (۳۶-۷)$$

به دلیل مشخص نبودن میانگین جامعهٔ آماری، تخمین واریانس، s^2، با استفاده از مشاهدات صورت می گیرد:

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{X})^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{N} \right)^2 \qquad (۳۷-۷)$$

و برای داده هایی که دارای فراوانی هستند، داریم:

$$s^2 = \sum_{i=1}^{k} f(x_i)(x_i - \overline{X})^2 \qquad (۳۸-۷)$$

که k تعداد دسته ها و x_i نماینده دسته با فراوانی نسبی $f(x_i)$ است. اگر N<۳۰، بهتر است مقدار واریانس حاصل از (۳۷-۷) یا (۳۸-۷) در $(\frac{N}{N-1})$ ضرب شود. جذر آن (انحراف معیار s یا σ) دارای واحد میانگین است و لذا بهتر تفسیر می شود.

ضریب تغییرات

ضریب تغییرات (Coefficient of variation) معرف ویژگی پراکندگی ولی بدون بعد است:

$$C_v = \sigma / \mu \qquad (۳۹-۷)$$

$$\hat{C}_v = s / \overline{X} \qquad (۴۰-۷)$$

که C_v مربوط به جامعهٔ آماری و $\hat{C}_v$ مربوط به تعداد نمونه های محدود مشاهداتی است.

مثال ۷-۹: مقادیر بارش روزانه بر اساس مقدار دسته بندی های مختلف درجدول ۷-۷ همراه با فراوانی هر دسته درج گردیده است. مطلوب است محاسبه انحراف معیار وضریب تغییرات بارش در این ایستگاه.

جدول ۷-۷ فراوانی مطلق بارش روزانه

دسته بارش (mm)	فراوانی (day)
۱۰۰-۱۱۰	۱۰
۱۱۰-۱۲۰	۱۶
۱۲۰-۱۳۰	۹
۱۳۰-۱۴۰	۱۰
۱۴۰-۱۵۰	۲۰
۱۵۰-۱۶۰	۱۵
۱۶۰-۱۷۰	۲۰

حل: با میانگین داده های بارش روزانه برابر $x = 138.9(\text{mm})$، انحراف معیار و ضریب تغییرات مطابق جدول ۷-۸ داریم:

$$s^2 = 407.77 \ , \ s = 20.2\,(\text{mm}) \quad , \quad \hat{C}_v = \frac{20.2}{138.9} = 0.145$$

جدول ۷-۸ محاسبهٔ واریانس داده های بارش روزانه

بارش روزانه (mm)	نمایندهٔ دسته (mm)	$(x-\overline{X})$ (mm)	$(x-\overline{X})^2$ $(mm)^2$	فراوانی نسبی $f(x_i)$	$f(x_i)(x-\overline{X})^2$
۱۰۰-۱۱۰	۱۰۵	-۳۳/۹	۱۱۴۹/۲۱	۰/۱۰	۱۱۴/۹۲
۱۱۰-۱۲۰	۱۱۵	-۲۳/۹	۵۷۱/۲۱	۰/۱۶	۹۱/۳۹
۱۲۰-۱۳۰	۱۲۵	-۱۳/۹	۱۹۳/۲۱	۰/۰۹	۱۷/۳۸
۱۳۰-۱۴۰	۱۳۵	-۳/۹	۱۵/۲۱	۰/۱۰	۱/۵۲
۱۴۰-۱۵۰	۱۴۵	۶/۱	۳۷/۲۱	۰/۲۰	۷/۴۴
۱۵۰-۱۶۰	۱۵۵	۱۶/۱	۲۵۹/۲۱	۰/۱۵	۳۸/۸۸
۱۶۰-۱۷۰	۱۶۵	۲۶/۱	۶۸۱/۲۱	۰/۲۰	۱۳۶/۲۴
$\sum$ ۴۰۷ / ۷۷					

چولگی

در توزیع های کاملاً متقارن، گشتاورهای زوج آن ها صفر است. یک توزیع چوله یا نا متقارن دارای عدم تقارن نسبت به مرکز بوده و دارای گشتاورهای زوج غیر صفرند. گشتاور مرتبه سوم به عنوان چولگی (Skewness) تعریف می شود. از آن جا که میزان عدم تقارن بر حسب واحد متغیر بیان می شود، ضریب چولگی (Skewness coefficient) به صورت نسبت گشتاور مرتبه سوم حول مبدأ به توان سوم انحراف معیار تعریف می شود.

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{X})^3}{N\sigma^3} \qquad (۴۱-۷)$$

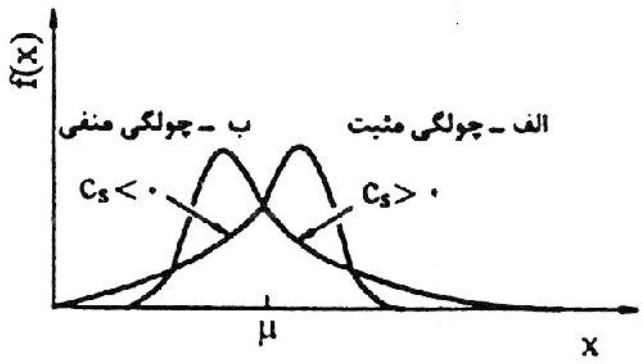
برای تعداد داده های آماری کم ($N \le ۳۰$) توصیه می شود که ضریب چولگی محاسبه شده از رابطهٔ (۴۱-۷)، که برای جامعهٔ آماری است، در ضریب $\frac{N^2}{(N-1)(N-2)}$ ضرب شود.

در توزیع های متقارن، گشتاور مرتبه سوم صفر است ($\gamma_1 = 0$). در حالت چولگی به راست (دنبالهٔ طولانی توزیع در سمت راست) (نمودار ۷-۶-الف)، $\gamma_1 > ۰$ و در حالت چولگی به چپ (دنبالهٔ طولانی توزیع در سمت چپ) (نمودار ۷-۶-ب)، $\gamma_1 < 0$ است. وقتی تعداد داده های مشاهداتی برای محاسبهٔ ضریب چولگی کم تر از ۵۰ عدد باشد، به جای γ_1 (ضریب چولگی جامعهٔ آماری)، از Cs (ضریب چولگی نمونه) استفاده می شود. چولگی به صورت های زیر محاسبه می شود:

$$\text{Skewness coefficient} = \frac{3(\text{mean} - \text{median})}{\text{std dev}} \qquad (۴۲-۷)$$

$$\text{Skewness coefficient} = \frac{(\text{mean} - \text{mode})}{\text{std dev}} \qquad (۴۳-۷)$$

که رابطهٔ (۴۲-۷) را ضریب چولگی اول پیرسون (Pearson's first coefficient of skewness) و رابطهٔ (۴۳-۷) را ضریب چولگی دوم (Pearson's second coefficient of skewness) پیرسون نامند.



نمودار ۷-۶ چولگی مثبت و منفی

مثال ۷-۱۰: مطلوب است محاسبه ضرایب پیرسون برای چولگی داده های بارش روزانه مثال ۷-۹

حل: بر اساس حل مثال ۷-۹ داریم: $\overline{X} = 138.9\,(mm)\ ,\ \ Median = 142.5\,(mm)\ ,\ St.Dev. = 20.2\,(mm)$

لذا بر اساس رابطه (۷-۴۲) برای ضریب چولگی اول پیرسون داریم:

$$\text{چولگی} = \frac{3\times(138.9-142.5)}{20.2} = -0.53$$

لذا چولگی به سمت چپ است. برای محاسبه ضریب چولگی دوم پیرسون نیاز به محاسبه نما است و لذا:

$$I = 140,\ f = 20\ ,\ \ f_1 = 10\ ,\ f_2 = 15,\ \ C = 10$$

و

$$\text{نما} = 140 + \frac{20-10}{(20-10)+(20-15)}\times 10 = 146.67\ \ (mm)$$

پس بر اساس رابطه (۷-۴۳) داریم:

$$\text{چولگی} = \frac{138.9-146.67}{20.2} = -0.38$$

مثال ۷-۱۱: مطلوب است محاسبه ضریب چولگی داده های بارش مثال ۷-۹..

حل: خلاصه محاسبات گشتاور مرتبه سوم در جدول ۷-۹ آمده است. لذا بر اساس این جدول: $C_s = \frac{\hat{\mu}}{s^3} = \frac{-2100.46}{20.2^3} = -0.25$

جدول ۷-۹ محاسبهٔ واریانس داده های بارش روزانه

بارش روزانه (mm)	نمایندهٔ دسته $x_i\,(mm)$	$(x_i - \overline{X})$ (mm)	$(mm)^3\ \ (x_3 - \overline{X})^3$	فراوانی مطلق	فراوانی نسبی $f(x_i)$	$f(x_i)(x-\overline{X})^3$
۱۰۰-۱۱۰	۱۰۵	-۳۳/۹	-۳۸۹۵۸/۲۲	۱۰	۰/۱	-۳۸۹۵/۸۲
۱۱۰-۱۲۰	۱۱۵	-۲۳/۹	-۱۳۶۵۱/۹۲	۱۶	۰/۱۶	-۲۱۸۴/۳۱
۱۲۰-۱۳۰	۱۲۵	-۱۳/۹	-۲۶۸۵/۶۲	۹	۰/۰۹	-۲۴۱/۷۱
۱۳۰-۱۴۰	۱۳۵	-۳/۹	-۵۹/۳۲	۱۰	۰/۱	-۵/۹۳
۱۴۰-۱۵۰	۱۴۵	۶/۱	۲۲۶/۹۸	۲۰	۰/۲	۴۵/۴
۱۵۰-۱۶۰	۱۵۵	۱۶/۱	۴۱۷۳/۲۸	۱۵	۰/۱۵	۶۲۵/۹۹
۱۶۰-۱۷۰	۱۶۵	۲۶/۱	۱۷۷۷۹/۵۸	۲۰	۰/۲	۳۵۵۵/۹۲
$\sum = -۲۱۰۰/۴۶$			$N = \sum f = ۱۰۰$			

۷-۴ تحلیل فراوانی یا فرایند برازش توابع توزیع احتمال به داده ها

موضوع انتخاب نوع تابع توزیع احتمال برای داده های مورد استفاده در هیدرولوژی تحلیل فراوانی نام دارد. متغیرهای هیدرولوژیکی را می توان به دو صورت تحلیل نمود. یکی به صورت توصیفی (Descriptive) و دیگری استنتاجی (Inferential). روش توصیفی (کاربرد در هیدرولوژی مهندسی)، در حقیقت تحلیل داده های تاریخی جهت انتخاب نوع توزیع آماری مناسب است، که می تواند از بین توزیع های شناخته شده باشد. با انتخاب نوع توزیع آماری می توان وضعیت عملکرد پروژه های منابع آب را در آینده پیش بینی نمود. با انتخاب یک تابع توزیع احتمال، می توان از کلیهٔ خواص آن

جهت پیش بینی وضعیت آینده استفاده نمود. یعنی فرض بر این است که رفتار هیدرولوژیکی در آینده نیز حفظ خواهد شد. بایستی توجه داشت که همهٔ توزیع های تئوریک، توصیف کنندهٔ دقیق واقعیت های طبیعی نیستند و تقریب ها و احتیاط هایی در کاربرد آن ها برای داده های مشاهداتی مد نظر بوده است. در جدول ۷-۱۰ خلاصه توابع توزیع احتمال، مورد کاربرد در هیدرولوژی، به انضمام پارامترهای آن درج گردیده است. در ادامه به تشریح و موارد کاربرد هر یک از این توزیع ها پرداخته و مثال های کاربردی از آن ها در هیدرولوژی ارائه شده است.

جدول ۷-۱۰ توابع توزیع احتمال مورد کاربرد در هیدرولوژی

نام توزیع	تابع توزیع احتمالی	محدوده تغییرات	میانگین ($\overline{X}$ یا μ)	واریانس (s^2 یا σ^2)
دو جمله ای (Binomial)	$P(x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}P^x(1-p)^{n-x}$	$0 \le x \le n$	np	np(1-p)
پواسون (Poisson)	$p(x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	$0 \le x \le n$	λ	λ
یکنواخت (Uniform)	$f(x)=\frac{1}{b-a}$	$a \le x \le b$	$\frac{(a+b)}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
نمایی (Exponential)	$f(x)=\frac{1}{a}e^{-(\frac{x}{a})}$	$0 \le x \le +\infty$	a	a^2
نرمال (Normal)	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-(x-\mu)^2/2\sigma^2\right]$	$-\infty \le x \le +\infty$	μ	σ^2
لاگ نرمال (Lognormal)	$f(y)=\frac{1}{x\sigma_y\sqrt{2\pi}}\exp\left[-(y-\mu_y)^2/2{\sigma_y}^2\right]$	$-\infty \le y \le +\infty$ $0 \le x \le +\infty$	μ_y	σ_y^2
گاما (Gamma)	$f(x)=\frac{x^a \exp(-x/\beta)}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}$	$0 \le x \le +\infty$	$\beta(\alpha+1)$	$\beta^2(\alpha-1)$
مقادیر حدی (Extreme value)	$f(x)=\alpha\exp\{-\alpha(x-\mu)-\exp(-\alpha(x-\mu))\}$	$-\infty \le x \le +\infty$	$\mu+\frac{0.5772}{\alpha}$	$\frac{\pi^2}{6\alpha^2}$

۷-۴-۱ توابع توزیع با متغیرهای گسسته

توابع توزیع برای متغیرهای گسسته برای رخ دادهایی به کار می رود که نتیجهٔ این رخدادها، موفقیت (Success) یا شکست (Failure) است. این رخدادها در هیدرولوژی همانند سیلابی بودن یا نبودن، ابری بودن یا نبودن، شکست سازهٔ هیدرولیکی یا پابرجا بودن آن به کرات بررسی می شود. فرض های اساسی این توزیع آن است که n رخداد مستقل از هم بوده و فقط هر رخداد یا اتفاق می افتد یا نمی افتد (دو حالت) و احتمال هر پیشامد در طول تکرارهای مختلف ثابت است. از مهم ترین توزیع های احتمالاتی با متغیرهای گسسته، می توان به توزیع دو جمله ای و توزیع پواسون اشاره کرد.

توزیع دوجمله ای

اگر X متغیر تصادفی، n تعداد تکرار و p احتمال وقوع باشد، آنگاه احتمال عدم وقوع $q=(1-p)$ است و لذا احتمال رویداد $X=x$ برابر است با:

$$P(X=x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^{x}(1-p)^{n-x} \qquad ۴۴-۷$$

مثال ۷-۱۲: بر اساس داده های مشاهداتی نسبتا طولانی برای ماه فروردین، احتمال بارانی بودن روزانه در این ماه ۱۰٪ است. برای انجام یک کار تعمیراتی در طی این ماه که ۱۰ روز طول میکشد، هدف برآورد احتمال عدم وقوع بارش در این ۱۰ روز است. . دو روز بارش در ۱۲ روز کاری نیز مجاز است. مطلوب است احتمال انجام به موقع کار (احتمال اینکه در این ۱۲ روز بارش روی دهد

حل: از معادله توزیع دو جمله ای (۷-۴۴):

$$n=10, p=0.1, q=0.9, x=0, \quad P(X=0)=\frac{10!}{0!(10-0)!}(0.1)^{0}(0.9)^{10}=0.35$$

در حالت دوم: $n=12\ ,\ p=0.1\ ,\ q=0.9\ ,\ x=2, \quad P(X=2)=\frac{12!}{2!(12-2)!}(0.1)^{2}(0.9)^{10}=0.23$

$P(x=2)+ P(x=1)+ P(x=0)=?$

توزیع پواسون

اگر در توزیع دو جمله ای n به سمت بی نهایت میل کند، p به سمت صفر میل کرده و حاصل ضرب آنها np مقدار ثابتی نظیر λ خواهد داشت. در این صورت توزیع، پواسون خواهد بود. در عمل نیاز نیست که واقعا $p\to ۰$ و $n\to\infty$ میل کند، بلکه اگر p نسبتا کوچک و n بطور نسبی زیاد باشد، می توان از تابع پواسون زیر استفاده کرد:

$$p(X=x)=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!} \qquad ۴۵-۷$$

در هیدرولوژی، عمدتا مسائل حدی (با احتمال وقوع p متناسب با دوره آمار مشاهداتی n) با توزیع پواسون برآورد می شود، به شرط آنکه مقدار احتمال p نسبت به مقدار n کوچک باشد. به ویژه توزیع پواسون در تعیین احتمال خشکسالی در دوره زمانی معین، تعداد روزهای بارش برای موقعیتی خاص، و برآورد احتمال وقوع سیلاب با دوره بازگشت زیاد بکار می رود.

مثال ۷-۱۳: براساس آمار ۹۴ ساله ایستگاه هیدرومتری مقطع رودخانه ای، احتمال افزایشی دبی $Q_i=100\,(m^3/s)$، $p=0.02326$ است. با فرض استقلال وقوع سیلاب های سالانه، مطلوبست برآورد احتمال وقوع ۴ سیلاب با دبی بیشتر از $Q_i=100\,(m^3/s)$ طی ۱۰ سال آینده و نیز احتمال عدم وقوع این سیلاب در این مدت.

حل: بر اساس رابطه (۷-۴۵) داریم:

$$\lambda = np = 10 \times 0.02326 = 0.2326,\ x = 4,\ P(X = 4) = \frac{(0.2326)^4 \times e^{-0.2326}}{4!} = 0.0000966$$

همچنین در حالت دوم:

$$P(X = 0) = \frac{(0.2326)^0 \times e^{-0.2326}}{0!} = 0.7925$$

۷-۴-۲ توابع توزیع با متغیر های پیوسته

متغیر های هیدرولوژیکی تصادفی پیوسته با توابع توزیع احتمالی پیوسته برازش می شوند. اینجا توابع توزیع با متغیرهای پیوسته ای که در هیدرولوژی بیشتر کار برآورد دارند معرفی و مثال های کاربردی هر یک ارائه می شود.

توزیع نرمال

توزیع نرمال یا توزیع گوسی (Guassian distribution)، دارای تابع چگالی احتمال (PDF) و نمودار یک زنگوله متقارن است. با متغیر تصادفی پیوسته، تابع آن به شکل زیر تعریف می شود:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2\right] \qquad (۴۶-۷)$$

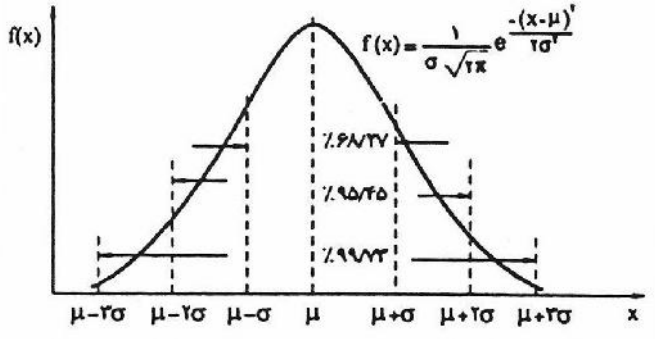
دو پارامتر این توزیع میانگین μ و انحراف معیار σ است که برای داده های محدود به ترتیب با $\overline{X}$ و s برآورد می شود. با یک تغییر متغیر ساده می توان آن را به یک تابع تک پارامتره تبدیل نمود. با تعریف $t = (x-\mu)/\sigma$ و $dx = \sigma dt$ داریم:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\frac{-t^2}{2}) \qquad (۴۷-۷)$$

و لذا تابع توزیع تجمعی (CDF) آن برابر است با:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp(\frac{-u^2}{2}) du \qquad (۴۸-۷)$$

متغیر t به عنوان متغیر استاندارد نرمال نامیده شده که دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار یک است. در جدول ۷-۱۱ مقادیر مساحت زیر منحنی نرمال استاندارد درج گردیده که پس از استاندارد کردن متغیر ها قابل کاربرد است. در نمودار ۷-۷ مقادیر مساحت زیر منحنی نرمال برای سه مقدار مختلف نشان داده شده است.



نمودار ۷-۷ منحنی توزیع نرمال

چهار شرط اصلی برای متغیری که در تابع توزیع نرمال بکار می رود بایستی بر قرار باشد:

۱- عوامل بسیار زیادی بر روی مقادیر متغیر ناشی از پیشامد موثر باشد،

۲- هر عامل بطور جداگانه تاثیر جزیی بر پیشامد داشته باشد،

۳- تاثیر هر عامل، مستقل از تاثیر دیگر عوامل باشد،

۴- تاثیر عوامل مختلف بر روی پیشامد قابل جمع کردن باشد.

تابع توزیع نرمال و به ویژه استاندارد آن در تئوری احتمالات جایگاه ویژه ای دارد. این تابع برای موارد زیر کاربرد دارد:

۱- تقریب زدن خطاهای تصادفی مرتبط با مشاهدات یا اندازه گیری های هیدرولوژیکی،

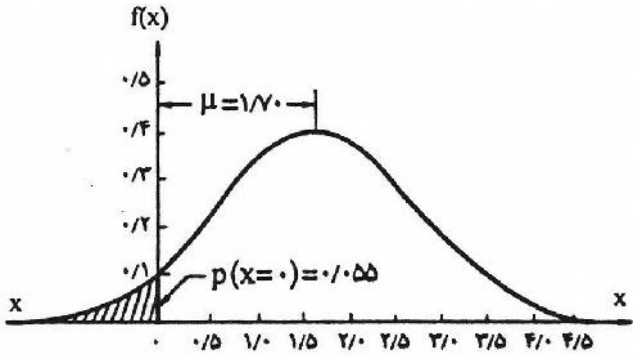
۲- برای مقایسه توزیع های دیگر غیر نرمال،

۳- برای میانگین های متغیرهای هیدرولوژیکی،

۴- تولید اعداد تصادفی به عنوان گام مهمی در تولید داده در هیدرولوژی.

عموما توزیع درازمدت داده های هیدرولوژیکی تقریبا نرمال است. به عنوان مثال دبی های سالانه در ایستگاه های هیدرومتری روی رودخانه ها با توزیع نرمال همخوانی دارد، در حالیکه دبی های روزانه دارای توزیع نرمال نیست.

توزیع حاصل از داده های مشاهداتی هیدرولوژیکی را توزیع تجربی (Empirical distribution) نامند. در واقع مسئله مهم برازش توزیع نرمال به مقادیر تجربی داده های هیدرولوژیکی، تغییر متغیر توزیع نرمال از $-\infty$ تا $+\infty$ است. ولی اغلب متغیرهای هیدرولوژیکی، نظیر دبی، مقداری مثبت دارند و نمی توانند دارای مقادیر منفی باشد. از طرف دیگر، برخی متغیرهای هیدرولوژیکی ممکن است برای طولانی مدت دارای مقادیر صفر باشد، مانند تبخیر و بارش. در چنین حالتی مقدار صفر، جرم احتمالی کمی دارد. لذا جرم احتمالی برای $x = ۰$ به صورت تئوریک این چنین تفسیر می شود که مجموع چگالی های احتمالی برای مقادیر منفی از $-\infty$ تا صفر مطابق نمودار ۷-۸ است.



نمودار ۷-۸ قسمت منفی تابع چگالی احتمال نرمال را می‌توان در قسمت P(X=0) به عنوان خطای توزیع نرمال فرض کرد

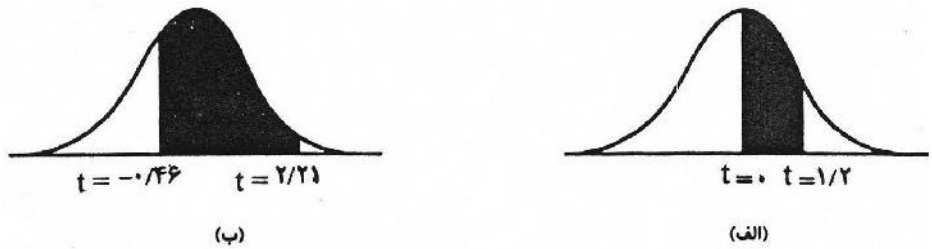
مثال ۷-۱۴: مطلوبست برآورد سطح زیر منحنی نرمال استاندارد: ۱) بین t=0 تا t=1.2، ۲) بین t=-0.46 تا t=2.21.

حل: بر اساس جدول ۷-۱۱ و مطابق نمودار داریم:

الف- $P(0 \le x \le 1.2) = 0.3849 - 0 = 0.3849$

ب- (مساحت بین t=0 تا t=2.21)+(مساحت بین t=-0.46 تا t=0) = $P(-0.46 \le x \le 2.21)$

که بنا به تقارن منحنی توزیع نرمال، مساحت بین t = -0.46 تا t = 0 برابر با مساحت بین t = 0.46 تا t = 0 است و لذا با استفاده از جدول ۷-۱۱ می توان نوشت $P(-0.46 \le x \le 2.21) = 0.1772 + 0.4865 = 0.6637$



نمودار ۷-۹ مساحت زیر منحنی نرمال (الف) بین t = 0 تا t = 1.2 (ب) t = - 0.46 تا t = 2.21

جدول ۷-۱۱ مساحت زیر منحنی نرمال $F(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{-t^2}{2}) dt$

t	۰۰	۰۱	۰۲	۰۳	۰۴	۰۵	۰۶	۰۷	۰۸	۰۹
۰/۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۴۰	۰/۰۰۸۰	۰/۰۱۲۰	۰/۰۱۵۹	۰/۰۱۹۹	۰/۰۲۳۹	۰/۰۲۷۹	۰/۰۳۱۹	۰/۰۳۵۹
۰/۱	۰/۰۳۹۸	۰/۰۴۳۸	۰/۰۴۷۸	۰/۰۵۱۷	۰/۰۵۵۷	۰/۰۵۹۶	۰/۰۶۳۶	۰/۰۶۷۵	۰/۰۷۱۴	۰/۰۷۵۳
۰/۲	۰/۰۷۹۳	۰/۰۸۳۲	۰/۰۸۷۱	۰/۰۹۱۰	۰/۰۹۴۸	۰/۰۹۸۷	۰/۱۰۲۶	۰/۱۰۶۱	۰/۱۱۰۳	۰/۱۱۴۱
۰/۳	۰/۱۱۷۹	۰/۱۲۱۷	۰/۱۲۵۵	۰/۱۲۰۳	۰/۱۳۳۱	۰/۱۳۶۸	۰/۱۴۰۶	۰/۱۴۴۳	۰/۱۴۸۰	۰/۱۵۱۷
۰/۴	۰/۱۵۵۴	۰/۱۵۹۱	۰/۱۶۲۸	۰/۱۶۶۴	۰/۱۷۰۰	۰/۱۷۳۶	۰/۱۷۷۲	۰/۱۸۰۸	۰/۱۸۴۴	۰/۱۸۷۹
۰/۵	۰/۱۹۱۵	۰/۱۹۵۰	۰/۱۹۸۵	۰/۲۰۱۹	۰/۲۰۵۴	۰/۲۰۸۸	۰/۲۱۲۳	۰/۲۱۵۷	۰/۲۱۹۰	۰/۲۲۲۴
۰/۶	۰/۲۲۵۷	۰/۲۲۹۱	۰/۲۳۲۴	۰/۲۳۵۷	۰/۲۳۸۹	۰/۲۴۲۲	۰/۲۴۵۴	۰/۲۴۸۶	۰/۲۵۱۸	۰/۲۵۴۹
۰/۷	۰/۲۵۸۰	۰/۲۶۱۱	۰/۲۶۴۲	۰/۲۶۷۳	۰/۲۷۰۴	۰/۲۷۳۴	۰/۲۷۶۴	۰/۲۷۹۴	۰/۲۸۲۳	۰/۲۸۵۲
۰/۸	۰/۲۸۸۱	۰/۲۹۱۰	۰/۲۹۳۹	۰/۲۹۶۷	۰/۲۹۹۵	۰/۳۰۲۳	۰/۳۰۵۱	۰/۳۰۷۸	۰/۳۱۰۶	۰/۳۱۳۳
۰/۹	۰/۳۱۵۹	۰/۳۱۸۶	۰/۳۲۱۲	۰/۳۲۳۸	۰/۳۲۶۴	۰/۳۲۸۹	۰/۳۳۱۵	۰/۳۳۴۰	۰/۳۳۶۵	۰/۳۳۸۹
۱/۰	۰/۳۴۱۲	۰/۳۴۳۸	۰/۳۴۶۱	۰/۳۴۸۵	۰/۳۵۰۸	۰/۳۵۳۱	۰/۳۵۵۴	۰/۳۵۷۷	۰/۳۵۹۹	۰/۳۶۲۱
۱/۱	۰/۳۶۴۳	۰/۳۶۶۵	۰/۳۶۸۶	۰/۳۷۰۸	۰/۳۷۲۹	۰/۳۷۴۹	۰/۳۷۷۰	۰/۳۷۹۰	۰/۳۸۱۰	۰/۳۸۳۰
۱/۲	۰/۳۸۴۹	۰/۳۸۶۹	۰/۳۸۸۸	۰/۳۹۰۷	۰/۳۹۲۵	۰/۳۹۴۴	۰/۳۹۶۲	۰/۳۹۸۰	۰/۳۹۹۷	۰/۴۰۱۵
۱/۳	۰/۴۰۳۲	۰/۴۰۴۹	۰/۴۰۶۶	۰/۴۰۸۲	۰/۴۰۹۹	۰/۴۱۱۵	۰/۴۱۳۱	۰/۴۱۴۷	۰/۴۱۶۲	۰/۴۱۷۷
۱/۴	۰/۴۱۹۲	۰/۴۲۰۷	۰/۴۲۲۲	۰/۴۲۳۶	۰/۴۲۵۱	۰/۴۲۶۵	۰/۴۲۷۹	۰/۴۲۹۲	۰/۴۳۰۶	۰/۴۳۱۹
۱/۵	۰/۴۳۳۲	۰/۴۳۴۵	۰/۴۳۵۷	۰/۴۳۷۰	۰/۴۳۸۲	۰/۴۳۹۴	۰/۴۴۰۶	۰/۴۴۱۸	۰/۴۴۳۰	۰/۴۴۴۱
۱/۶	۰/۴۴۵۲	۰/۴۴۶۳	۰/۴۴۷۴	۰/۴۴۸۵	۰/۴۴۹۵	۰/۴۵۰۵	۰/۴۵۱۵	۰/۴۵۲۵	۰/۴۵۳۵	۰/۴۵۴۵
۱/۷	۰/۴۵۵۴	۰/۴۵۶۴	۰/۴۵۷۳	۰/۴۵۸۲	۰/۴۵۹۱	۰/۴۵۹۹	۰/۴۶۰۸	۰/۴۶۱۶	۰/۴۶۲۵	۰/۴۶۳۳
۱/۸	۰/۴۶۴۱	۰/۴۶۴۹	۰/۴۶۵۶	۰/۴۶۶۴	۰/۴۶۷۱	۰/۴۶۷۸	۰/۴۶۸۶	۰/۴۶۹۳	۰/۴۶۹۹	۰/۴۷۰۶
۱/۹	۰/۴۷۱۳	۰/۴۷۱۹	۰/۴۷۲۶	۰/۴۷۳۱	۰/۴۷۳۸	۰/۴۷۴۴	۰/۴۷۵۰	۰/۴۷۵۶	۰/۴۷۶۲	۰/۴۷۶۷
۲/۰	۰/۴۷۷۲	۰/۴۷۷۸	۰/۴۷۸۳	۰/۴۷۸۸	۰/۴۷۹۳	۰/۴۷۹۸	۰/۴۸۰۳	۰/۴۸۰۸	۰/۴۸۱۲	۰/۴۸۱۷
۲/۱	۰/۴۸۲۱	۰/۴۸۲۶	۰/۴۸۳۰	۰/۴۸۳۴	۰/۴۸۳۸	۰/۴۸۴۲	۰/۴۸۴۶	۰/۴۸۵۰	۰/۴۸۵۴	۰/۴۸۵۷
۲/۲	۰/۴۸۶۱	۰/۴۸۶۵	۰/۴۸۶۸	۰/۴۸۷۱	۰/۴۸۷۵	۰/۴۸۷۸	۰/۴۸۸۱	۰/۴۸۸۴	۰/۴۸۸۷	۰/۴۸۹۰
۲/۳	۰/۴۸۹۳	۰/۴۸۹۶	۰/۴۸۹۸	۰/۴۹۰۱	۰/۴۹۰۴	۰/۴۹۰۶	۰/۴۹۰۹	۰/۴۹۱۱	۰/۴۹۱۳	۰/۴۹۱۶
۲/۴	۰/۴۹۱۸	۰/۴۹۲۰	۰/۴۹۲۲	۰/۴۹۲۵	۰/۴۹۲۷	۰/۴۹۲۹	۰/۴۹۳۱	۰/۴۹۳۲	۰/۴۹۳۴	۰/۴۹۳۶
۲/۵	۰/۴۹۳۸	۰/۴۹۴۰	۰/۴۹۴۱	۰/۴۹۴۳	۰/۴۹۴۵	۰/۴۹۴۶	۰/۴۹۴۸	۰/۴۹۴۹	۰/۴۹۵۱	۰/۴۹۵۲
۲/۶	۰/۴۹۵۳	۰/۴۹۵۵	۰/۴۹۵۶	۰/۴۹۵۷	۰/۴۹۵۹	۰/۴۹۶۰	۰/۴۹۶۱	۰/۴۹۶۲	۰/۴۹۶۳	۰/۴۹۶۴
۲/۷	۰/۴۹۶۵	۰/۴۹۶۶	۰/۴۹۶۷	۰/۴۹۶۸	۰/۴۹۶۹	۰/۴۹۷۰	۰/۴۹۷۱	۰/۴۹۷۲	۰/۴۹۷۳	۰/۴۹۷۴