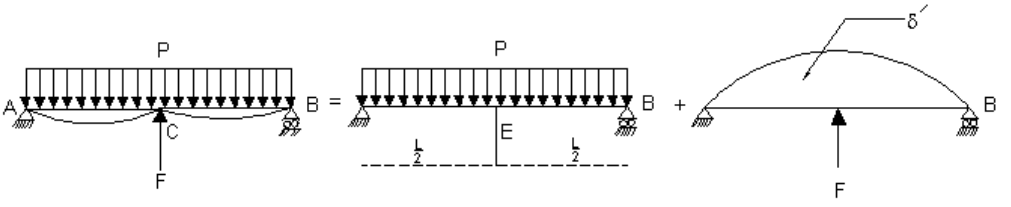
اگر از تغییر شکل محوری ستون صرف نظر کنیم شرط سازگاری تغییر مکان ها در نقطه C بصورت زیر نوشته می شود .



$$\delta = \delta'$$

$$\left.\begin{matrix} \delta', \delta \end{matrix}\right\} \delta = \frac{5PL^4}{384EI} \qquad , \qquad \delta' = \frac{FL^3}{48EI}$$

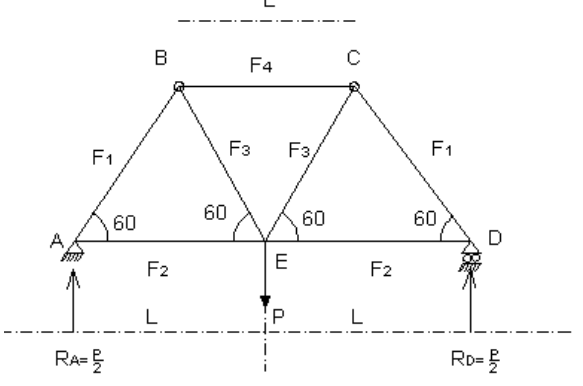
$$\delta = \delta' \Rightarrow \frac{5PL^4}{384EI} = \frac{FL^3}{48EI} \Rightarrow F = \frac{5PL}{8}$$

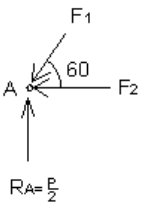
حال اگر نیروی F را با $(P_{cr})_{cd}$ مساوی قرار دهیم مقدار بحرانی بار P یعنی P_{cr} بدست آید .

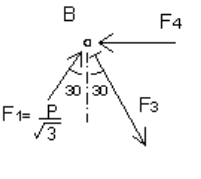
$$\frac{5PL}{8} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7???)^2} \qquad : \quad P_{cr} = 32.3\frac{EI}{L^3}$$

مثال:

خر پای شکل فوق از اعضای یکسان بطول L و گشتاور ما ند حداقل I تشکیل شده است . بار بحرانی P_{cr} را که باعث فرو ریختن خر پا در اثر کمانش یکی از اعضای آن می شود پیدا کنید .







$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \xrightarrow{1} F_1 \cos 30 = \dfrac{P}{2} \quad : \quad F_1 = \dfrac{P}{\sqrt{3}} & \text{فشاري} \\ \sum F_x = 0 \xrightarrow{1} F_2 \cos 60 = \dfrac{P}{2\sqrt{3}} \quad : \quad F_1 = \dfrac{P}{\sqrt{3}} & \text{كششي} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \xrightarrow{2} F_3 = F_1 = \dfrac{P}{\sqrt{3}} & \text{فشاري} \\ \sum F_x = 0 \xrightarrow{2} F_4 = (F_1 + F_3)\cos 60 = \dfrac{P}{\sqrt{3}} & \text{كششي} \end{cases}$$

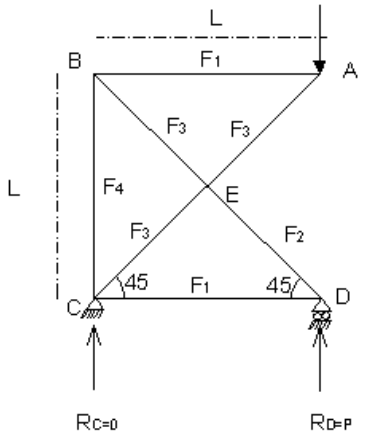
عضوهاAB,BC.CD, تحت فشاری می باشند و نیروی فشاری همه آنها $\frac{P}{\sqrt{3}}$ می باشد .

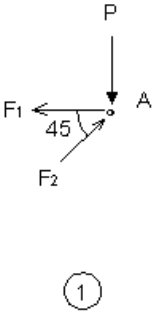
چون طول این سه عضو نیز برابر است هر سه آنها عضوهای بحرانی می باشند و خرپا وقتی فرو می ریزد که نیروی داخلی آنها برابر بار بحرانی $\frac{\pi^2 EI}{L^2}$ گردد .

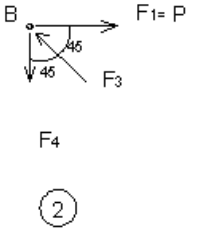
$$F_1 = F_4 = \frac{P_{cr}}{\sqrt{3}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad : \qquad P_{cr} = \frac{\sqrt{3}\pi^2 EI}{L^2}$$

مثال:

اعضای خرپای شکل ذیل همگی دارای گشتاور ماند حداقل I می باشند باربحرانی راکه باعث فرو ریختن خرپا ؟؟؟؟؟ کمانش یک از اعضای آن می شود پیدا کنید.







$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \xrightarrow{1} F_2 \cos 45 = P \;:\; F_2 = \sqrt{2}\;P & \text{فشاري} \\ \sum F_x = 0 \xrightarrow{1} F_1 = F_2 \cos 45 = P & \text{كششي} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \xrightarrow{2} F_3 \cos 45 = P \;:\; F_3 = \sqrt{2}\;P & \text{فشاري} \\ \sum F_y = 0 \xrightarrow{2} F_4 \cos 45 = P & \text{كششي} \end{cases}$$

بنابراین عضـــوهای AE,BE,CE,DE تحت فشار می باشند ونیروی فشاری همه آنها $\sqrt{2}P$ می باشند.چون طول آنها نیز یکسان است هرسه باهم کمانه می کنند .خرپا وقتی خود میریزد که نیروی داخلی آنها برابر باربحرانی $\frac{\pi^2 EI}{(\frac{L}{\sqrt{2}})^2}$ گردد.

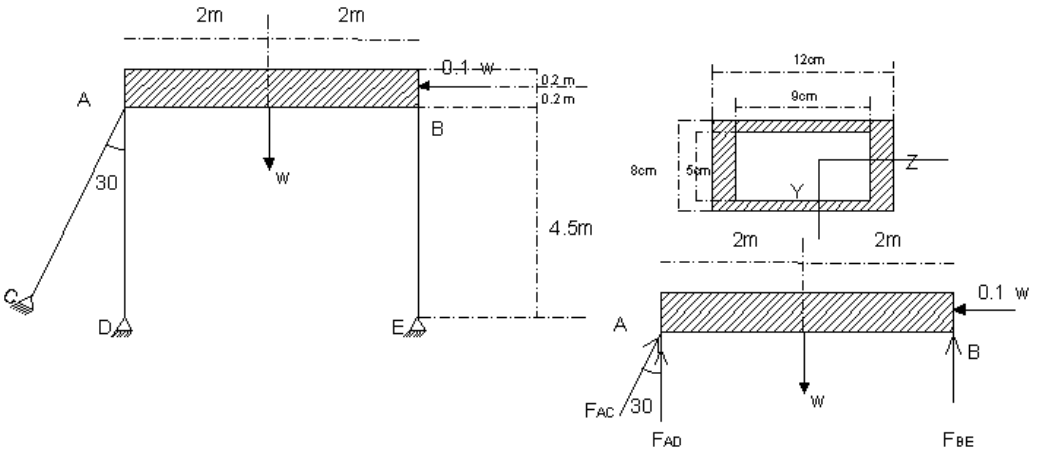
$$F_{\ 2} = F_3 = \sqrt{2}P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\frac{L}{\sqrt{2}})^2} \;:\; P_{cr} = \frac{\sqrt{2}\pi^2 EI}{L^2}$$

مثال:

جسم صلبی بوزن W مطابق شکل بر روی ستون های BE,AD,AC قرار دارد و تحت اثر یک نیروی افقی (ناشی از زلزله یا باد) مساوی $0.1W$ می باشد . مقطع ستون ها بصورت صندوقی تو خالی با ابعاد نشان داده شده می باشد . حداکثر وزن W چقدر می تواند باشد تا سازه مزبور در اثر پدیده کمانش فرو نریزد ؟

جنس ستون ها فولاد با ضریب ارتجاعی $2.1\times10^6 \ \frac{kg}{cm^2}$ می باشد .

ازنظر معیار کمانش ومعیار مقاومت آیا ستونها پایدار هستند؟



چون ستون ها در دو انتها مفصلی می باشند بار وارد بر آنها فقط بار محوری می باشد

$$\sum \overset{+}{\overrightarrow{M_A}} = 0 \quad \Rightarrow F_{AC}\cos 60 - 0.1w - 4F_{BE} = 0 \quad \rightarrow F_{BE} = 0.495 \quad N$$

$$\sum \overset{+}{\overrightarrow{F_x}} = 0 \quad \Rightarrow F_{AC}\cos 60 - 0.1w = 0 \quad \rightarrow F_{AC} = 0.2 \quad w$$

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AC}\cos 30 + F_{AD} + F_{BE} - w = 0 \qquad ; \qquad F_{AD} = 0.33 \quad w$$

با توجه به این که مقطع هر سه ستون یکسان می باشد و $F_{BE}>F_{AD}$ کمانش ممکن است در ستونهای BE یا AC رخ دهد . بنابراین بار کمانش هر یک از این دو ستون را حساب می کنیم ، کمانش این ستون ها حول محور Z (محور ضعیف) صورت خواهد گرفت .

$$I_Z = \frac{12(8)^3 - 9(5)^3}{12} = 418.25 \quad cm^4$$

$$(P_{cr})_{BE} = \frac{\pi^2 EI_Z}{L^2} = \frac{\pi^2 (2.1\times 10^6)(418.25)}{(450)^2} = 42.81 \quad t$$

$$42.81 \ t > 0.495 \ w \quad \Rightarrow w = 86.81 \ t$$

$$(P_{cr})_{AC} = \frac{\pi^2 EI_Z}{(\frac{L}{\cos 30})^2} = \frac{\pi^2 (2.1\times 10^6)(418.25)}{(450/\cos 30)^2} = 32.11t$$

$$32.11\ t > 0.2w \qquad \Rightarrow \qquad w =< 160.55\ \ t$$

بنابراین برای اینکه سازه مزبور بود در اثر پدیده کمانش فرو نریزد w باید از 86.48ton کمتر باشد چنانچه برابر 86.48t گردد ستون BE کمانه خواهد کرد .