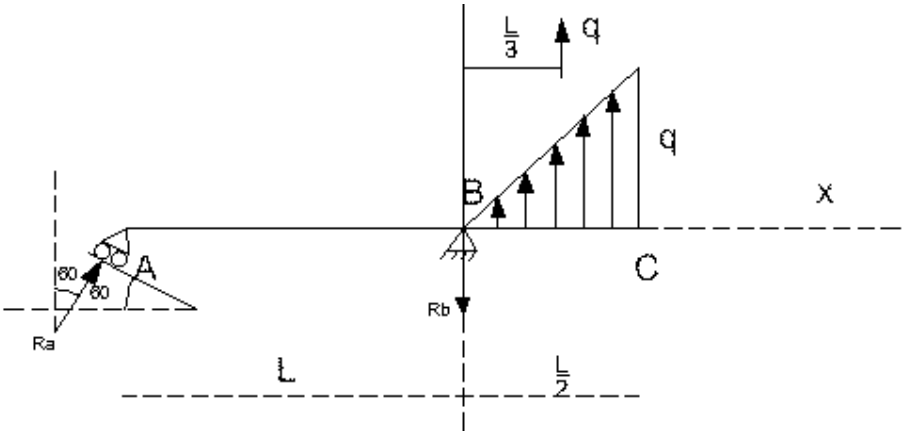
مثال:

منحنی تغییر مکان قسمت AB تیرABC را که در نقطه A تکیه گاه غلطکی مایل قرار دارد و در قسمت BC تحت بارگذاری مثلثی میباشد با استفاده از معادله دیفرانسیل تغییر مکان تیر تعیین کنید. ماکزیمم تغییر مکان در دهانه AB در کجا ومقدارش چقدر است.



$$\sum MA = 0 \Rightarrow LR_B = \frac{qL}{4}(L + \frac{L}{3}) : R_B = \frac{qL}{3}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A \cos 60^0 - R_B + \frac{qL}{4} = 0 : R_A = \frac{qL}{6}$$

$$EIv'' = -M = -R_A \cos 60^0 x = -\frac{qL}{12}x \qquad 0 \le x \le L$$

$$EIv' = -\frac{qL}{24}x^2 + C_1$$

$$EIv = -\frac{qL}{72}x^3 + C_1 x + C_2$$

$$v(0) = 0 \ (1) \qquad v(L) = 0 \quad (2) \qquad (1) \Rightarrow C_2 = 0$$

$$(2) \Rightarrow -\frac{qL^4}{72} + C_1 L = 0 \qquad : C_1 = \frac{qL^3}{72}$$

$$EIv = \frac{qLx}{72}(L^2 - x^2) \qquad (3)$$

برای تعیین محل تغییر مکان ماکزیمم مشتق v مساوی صفر قرار می دهیم.

$$V' = \frac{ql}{72EI}(L^2 - 3x^2) = 0 \qquad : x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

با جایگزینی $x = \frac{L}{\sqrt{3}}$ درمعادله (3) تغییر مکان ماکزیمم به دست می آید.

$$v_{\max} = \frac{qL^4}{108\sqrt{3}EI}$$

طریقه دیگر حل این مسئله با استفاده از معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم می باشد.

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = -q = 0$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = C_1 \qquad EIv'' = C_1 x + C_2$$

$$EIv' = \tfrac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \qquad EIv = \tfrac{1}{6}C_1 x^3 + \tfrac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \rightarrow C_4 = 0$$

شرایط حدی:

$$v''(0) = v(l) = 0 \qquad \overset{C_1=0}{v''(0) = 0}$$

$$EIv''(L) = -M_B = -\left(\frac{qL}{4}\right)\left(\frac{L}{3}\right) = C_1 L \Rightarrow C_1 = \frac{qL}{12}$$

با استفاده از چهار شرط حدی فوق چهار ثابت انتگرال گیری واز آنجا معادله منحنی تغییرمکان معادله (3) به دست می آید

بار بحرانی برای ستونهای دو سر مفصل

رابطه اولر $P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2} = \dfrac{\pi^2 EAr^2}{L^2}$

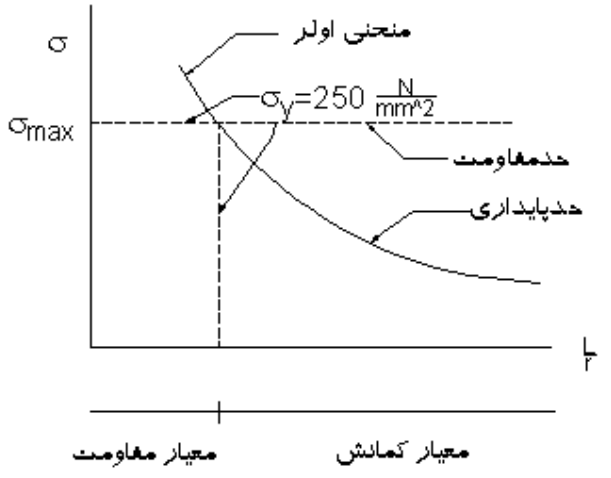
I: برای محاسبه I_x I و I_y هر دو را حساب می کنیم هر کدام کمتر باشد آنرا در فرمول جایگزین

می کنیم مقدار تنش مربوط به بار بحرانی را ، تنش بحرانی نامیده می شود σ_{cr}

شعاع چرخش $r = \sqrt{\dfrac{I}{A}}$ $\qquad\qquad$ $\sigma_{cr} = \dfrac{P_{cr}}{A} = \dfrac{\pi^2 EAr^2}{AL^2}$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2}$$

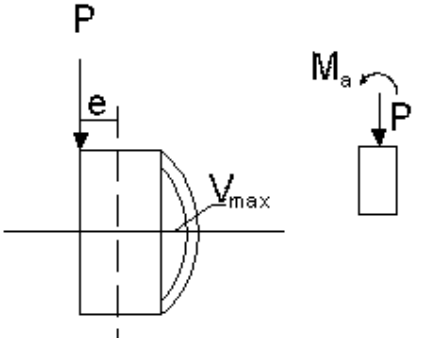
نسبت $\dfrac{L}{r}$ را ضریب لاغری ستون گویند



نمودار تنش فشاری عمودی درمقابل ضریب لاغری

$$E = 2\times10^5 \quad \frac{N}{mm^2}$$

بار خارج ازمرکز درستون



برای تبدیل P به مرکز

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_c}{I}$$

$$M_{\max} = P_{V_{\max}} + P_e = P(V_{\max} + e)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{(V_{\max} + e)c}{r^2}\right] \qquad V_{\max} = e(\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} - 1)$$

$$V_{\max} = e\left[\sec(\sqrt{\frac{P}{EI}}L/2) - 1\right] \qquad P = \frac{P_{cr}}{FS} \qquad FS = \frac{P_{cr}}{P}$$

$$\begin{cases} \sigma_{\max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec(\sqrt{\frac{P}{EI}} \quad \frac{L}{2})\right] \\ \sigma_{\max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right] \end{cases}$$

$$\frac{P}{P_{cr}} = \frac{1}{F.S}$$

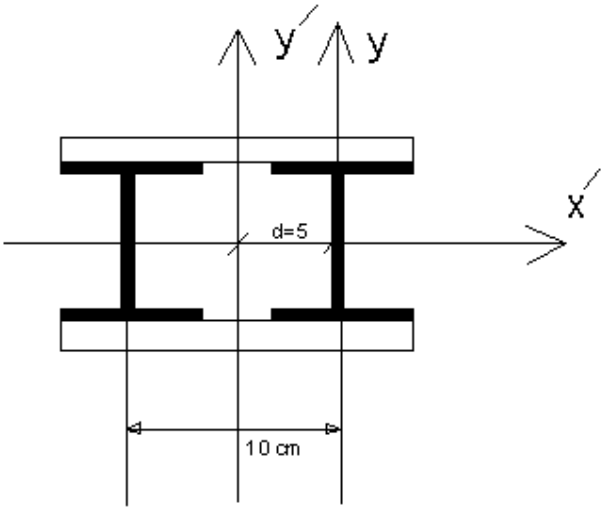
مثال:

ستونی از دو مقطع Iشکل که بوسیله صفحه هایی به یکدیگر متصل شده اند تشکیل شده است . سطح مقطع هر یک از مقاطع $A = 22.94 \quad cm^2$ و $I_x = 863.28 \ cm^4$ (قویتر)

$I_y = 71.09\ cm^4$ (ضعیفتر) می باشد .

تکیه گاههای ستون ساده و طول آن 360cm می باشد بار بحرانی ستون چقدر است

$$E = 2.1\times10^6\ \frac{Kg}{cm^2}$$



$$I_x = I_{x'} = 2I_X = 2(863.28)1726.56\ \ cm^4$$

$$I_{Y'} = 2\left[I_y + Ad^2\right] = 2\left[71.09 + 22.94(5^2)\right] = 1289.18\ \ cm^4$$

$$I_{\min} = 1289.18 \qquad\qquad L_e = L = 360\ \ cm$$

دو سر تکیه گاه ساده

$$p_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L_e{}^2} = \frac{(3.14)^2\times2.1\times10^6\times1289.18}{(360)^2} = 206171\ \ Kg$$

$$p_{all} = \frac{P_{cr}}{2.5} = 82.4 \quad TON$$