بار گسترده $q: EI\frac{d''v}{dx''}=-\omega_0$

(1) $V=EI\frac{d^3v}{dx^3}=-\omega_0 x+C_1$

(2) لنگر خنثی $M=EI\frac{d^2v}{dx^2}=-\omega_0 x^2/2+C_1x+C_2$

(3) شیب $\theta: EI\frac{dv}{dx}=-\omega_0 x^3/2+C_1x^3/2+C_2x+C_3$

(4) تغییر فرم $v: EIv=-\omega_0 x^4/24+C_1x^3/6+C_2x^2/2+C_3x+C_4$

$$x=0\begin{cases} v=0\Rightarrow C_4=0 \\ \theta=\frac{dv}{dx}=0\Rightarrow C_3=0 \end{cases}$$

$$X=L\begin{cases} v=0\xrightarrow{4}-\frac{\omega_0L^4}{24}+C_1\frac{L^3}{6}+C_2\frac{L^2}{2}=0 \\ M=0\xrightarrow{2}-\frac{\omega_0L^2}{2}+C_1L+C_2=0 \end{cases}$$

۲ معادله ۲ مجهول : $C_1=\frac{5WL}{8}$ و $C_2=\frac{-WL^2}{8}$

معادله تغییر فرم $V=\frac{\omega_0}{EI}\left[-\frac{x^4}{24}+\frac{5Lx^3}{8\times6}-\frac{L^2x}{16}\right]$

$$\frac{dv}{dx}=v'=\theta=\frac{\omega_0}{EI}\left[-\frac{x^3}{6}+\frac{5Lx^2}{16}-\frac{L^2}{8}\right]$$

۲جواب یکی مثبت و دیگری منفی

$v'=0\rightarrow x\left[\frac{x^2}{6}+\frac{5Lx}{16}-\frac{L^2}{8}\right]=\begin{cases} x_1=\alpha \\ x_2=\beta \end{cases}$

جواب مثبت قابل قبول است

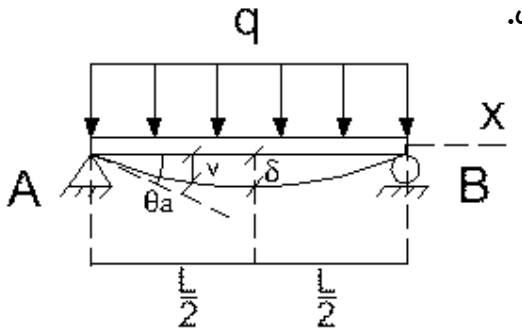
در $x=o\Rightarrow \quad M(0)=M_A=-\frac{L^2\omega_0}{8}$

برش $V=+wo\left[-x+\frac{5L}{8}\right]\rightarrow V(0)=-Ra=\frac{5\omega_0L}{8}$

$V(L)=R_b=\frac{3\omega_0L}{8}$

منحنی ارتجاعی یک تیر ساده تحت اثر بارگسترده یکنواخت q را پیدا کنید.

شیب منحنی ایجاد در وسط دهانه صفر است.



$$M = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

لنگر خمشی در فاصله x از تکیه گاه چپ

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{-M}{EI} \Rightarrow EIV'' = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \Rightarrow EI\frac{dv}{dx} = -\frac{qlx^2}{4} \pm \frac{qx^3}{6} + C_1 \qquad (A)$$

$$V' = 0 \qquad \left(x = L/2 \text{ در}\right) \Rightarrow V'\left(1/2\right) = 0 \overset{(A)}{\Longrightarrow} C_1 = -\frac{qL^3}{24}$$

$EIv' = \frac{-qLx^2}{4} \pm \frac{qx^3}{6} + \frac{qL^3}{24}$ مقدار C_1 را در معادله Aقرار دهید.

در x =0 v =0 $EIV = \frac{-qLx^3}{12} \pm \frac{qx^3}{24} + \frac{qL^3x}{24} + c_2$ ازA انتیگرال می گیریم.

$V = (0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow$ معادله منحنی ارتجاعی تیر $V = \frac{qx}{24EI}\left(-L^3 \pm X^3 \mu 2LX^2\right)$ (B)

تغییر مکان ماکزیمم (δ) در وسط دهانه تیر میباشد وبا قرار دادن $x = 1/2$ در معادله B به ددست می آید

$$\delta = V_{\max} = \frac{5qL^4}{384EI} \qquad EI = \frac{d^4v}{dx^4} = q \quad \text{طریقه دیگر}$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = qx + C_1 \qquad EIv'' = \frac{qx^2}{2} + C_1x + C_2$$

{0

تغییرمکان ها و لنگرهای خمشی در دو انتهای تیر صفر می باشند

$$EIv' = \frac{qx^3}{6} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

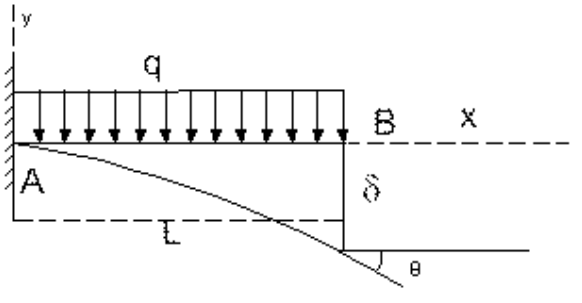
$$\Rightarrow v(0) = v(L) = 0 \qquad EIv = \frac{qx^4}{24} + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4$$

$$v\ (0) = v(l) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = \frac{-ql}{2} \quad , \quad c_2 = 0 \quad , \quad c_3 = \frac{ql^3}{24} \qquad c_4 = 0$$

$$EIv = -\frac{qx^4}{24} + \frac{ql^3 x}{24} + \frac{qlx^3}{12} + 0$$

مثال:

منحنی ارتجاعی و تغییر مکان ماکزیمم و شیب ماکزیمم تیر طره ای که تحت بار گسترده یکنواخت باشد به دست می آورید.



$$\begin{cases} M = \dfrac{-q(L-x)^2}{2} \\ V = q(L-x) \end{cases}$$

$$EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) = M = -q\,(L-x)^2 \Big/ 2$$

$$EI\left(\frac{dv}{dx}\right) = M = -q\,(L-x)^3 \Big/ 6 + c_1 \qquad V'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{qL^3}{6}$$ در تکیه گاه شیب برابر صفر است

$$(A)\quad v' = \frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2) \quad \rightarrow \quad EIv = \frac{q(l-x)^4}{24} + C_1 x + C_2$$

$$(B)\quad v = \frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) + C_2$$

$v(0) = 0$ شرط حدی درمحل تکیه گاه $\Rightarrow c_2 = 0 \xrightarrow{\text{معادله منحنی}} v = \frac{qx^2}{24EI}(6l^2 - 4l_x + x^2)$

تغییر مکان ماکزیمم δ و شیب ماکزیمم در انتهای آزاد تیر می باشد که با جایگزینی X=L بدست می آید

$$(B)\quad \delta = v(L) = \frac{qL^4}{8EI} \qquad (A)\quad \theta = v'(L) = \frac{qL^3}{6EI}$$

روش معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم

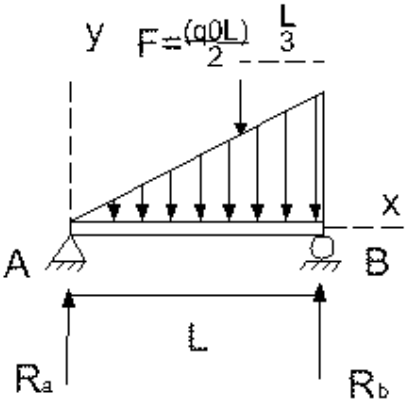
$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q \rightarrow EI\frac{d^3v}{dx^3} = qx + C_1 \qquad (k)$$

چون نیروی برشی در x =L صفر می باشد شرط حدی به صورت زیر:

$\frac{d^3v}{dx^3} = 0 \quad \Rightarrow C_1 = -qL \rightarrow$ درمعادله K قرار می دهیم و بقیه مانند بالا ادامه می دهیم

مثال)

معادله منحنی تغییرمکان تیر ساده ای را که بار مثلثی با شدت حداکثر q_0 را تحمل می کند تعیین کنید



برآیند بار مثلثی نیرویی است معادل $F\frac{qoL}{2}$ به فاصله $L/2$

از تکیه گاه B

$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_A(L) = \frac{q_o L}{2}(L/3)$$

$$RA = \frac{q_0 L}{6} \qquad \Rightarrow \sum F_y \overset{+}{\uparrow} = 0 \qquad\qquad R_A + R_B = \frac{q_0 L}{2} \Rightarrow R_B = \frac{q_0 L}{3}$$

$$R_B = q_0 L/2 - q_0 L/6 = q_0 L/3$$

$$EI = \frac{d^2 v}{dx^2} = M \qquad M(x) = \frac{q_0 L}{2}x - \frac{1}{2}(x)(\frac{x}{L})(q_0)(\frac{x}{3}) = \frac{q_0 L}{6}x - \frac{q_0}{6L}x^3$$

$$EI\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{q_0 L}{6}x = \frac{q_0}{6L}x^3$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{q_0 L}{12}x^2 - \frac{q_0}{24L}x^4 + C_1$$

$$EIv = \frac{q_0 l}{36}x^3 - \frac{q_0}{120l}x^5 + c_1 x + c_2$$

