$$\tan\theta = V' \qquad , \qquad \theta = Arc\tan v'$$

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d(Arc\tan v')}{dx}\frac{dx}{ds} \qquad ds^2 = dx^2 + dv^2$$

$$\frac{ds}{dx} = \left[1 + (\frac{dv}{dx})^2\right]^{1/2} = \left[1 + (V')^2\right]^{1/2}$$

$$\frac{d}{dx}(Arc\tan v') = \frac{v''}{1 + (v')^2} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow K = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{v''}{\left[1 + (v')^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad (3)$$

اگربار متمرکز باشد $q = 0$ است

حال در اینجا معادلات دیفرانسیل تیرهای ارتجاعی را به صورت زیر مورد استفاده قرار

میدهیم:

$v =$ تغییر مکان منحنی ارتجاعی

$\theta = \frac{dv}{dx} = v' =$ شیب منحنی ارتجاعی

$M = EI\frac{d^2v}{dx^2} = EI\overbrace{\qquad}^{\text{تغییر فرم}}v'' =$ خمش

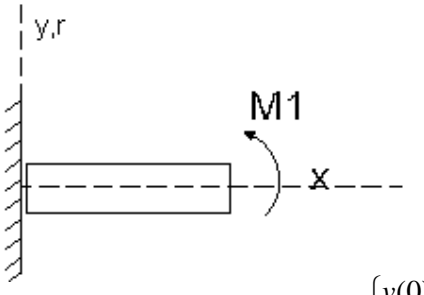
$V = EI\frac{d^3v}{dx^3} = EIv'' =$ برش

$q = EI\frac{d^4v}{dx^4} = EIv'''' =$ بار

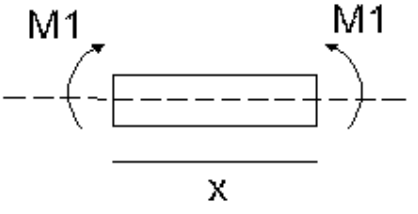
مثال

لنگرخمشی M_1 برانتهای آزاد یک تیر طره ای L و سختی خمشی ثابت EI وارد می شود

مطلوبست تعیین رابطهٔ منحنی ارتجاعی تیر



شرط مرزی در $x = L \leftarrow$ $\begin{cases} M(L) = +M_1 \\ V(L) = 0 \end{cases}$ شرایط مرزی $\begin{cases} v(0) = 0 \\ \theta(0) = 0 \end{cases}$



لنگر خمشی $EI\dfrac{d^2v}{dx^2} = M = M_1$

شیب $EI\dfrac{dv}{dx} = M_1 x + c_3 \rightarrow EIv'(0) = C_3 = 0$

$$EI\frac{dv}{dx} = M_1 x \rightarrow EIv = \tfrac{1}{2} M_1 x^2 + c_4 + c_3 x$$

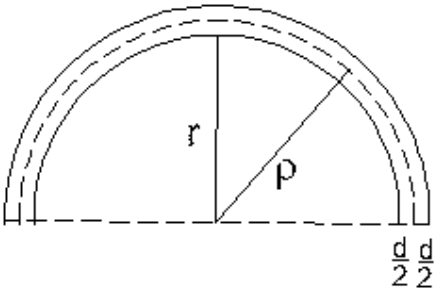
$$EIV(0) = C_4 = 0 \Rightarrow v = M_1 \, x^2 / 2EI$$

علامت مثبت نتیجه به دست آمده نشان می دهدکه تغییر مکان منحنی ارتجاعی به سمت بالا می باشد.

بزرگترین مقدارv در X=L رخ می دهد. شیب ارتجاعی در انتهای آزاد مساوی $+\dfrac{M_1 L}{EI}$ رادیان می باشد.

مثال

معمولاً برای حمل آرماتور 12 متری به وسیله وانت بار آنرا خم می کند و حمل می نمایند در صورتیکه آرماتور $+20^{mm}$ با خم کردن حمل گردد وقطر داخلی خم آرماتور50cm باشد تنش ماکزیمم که در آرماتور بوجود می آید محاسبه نمائید $E_{st} = 2.1\times10^5 \, N/mm^2$



$\sigma = \frac{-yE}{P}$ $y = 10mm$ فاصله بالاترین نقطه

نکته: مقایسه معادله (3) با معادله (1) صفحه قبل نشان می دهد که فرض منحنی ارتجاعی تخت معادل با صرف نظر نمودن $(V')^2$ در مقایسه با واحد می باشد.

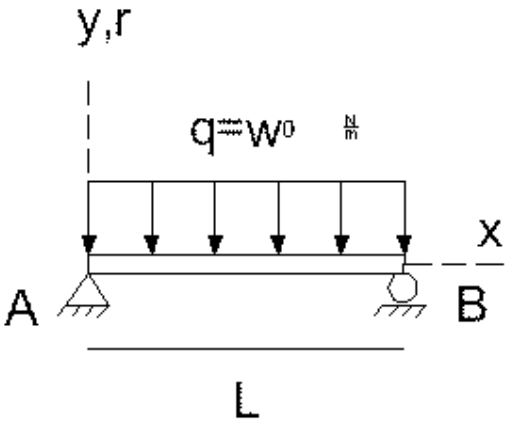
مثال :

یک تیر ساده تحت بار گسترده یکنواخت به طرف پائین مفروض است. منحنی خمشی تیر E I در تمام طول دهانه آن ثابت است. مطلوب است تعیین منحنی ارتجاعی تیر

(اگردر یک تیر بار متمرکز نباشد در آن صورت $\begin{matrix}\varpi = 0 \\ q = 0\end{matrix}$ می باشد.)

الف) با استفاده از معادله دیفرانسیل درجه دوم

ب: با استفاده از معادله دیفرانسیل درجه چهارم



$$R_A + B_B = -\omega_0 L$$

$$\curvearrowleft^{-}\sum M_A = O \quad \Rightarrow -\omega_0 L \ L/2 + RB(L) = 0 \qquad R_B = w_o \frac{L}{2}$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M = \frac{\omega_o L x}{2} - \frac{\omega_0 x^2}{2}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{\omega_0 L x^2}{4} - \frac{\omega_0 x^3}{6} + C_3$$

$$(A) \qquad EIV = \frac{\omega_0 L x^3}{12} - \frac{\omega_0 x^4}{24} + C_3 x + C_4$$

در رابطه A مقدار C_3 را قرار می دهیم

$$v(0) \text{ یا } EIv(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$EIv(L) = 0 \Rightarrow C_3 = -\frac{\omega_0 L^3}{24}$$

$$\frac{+\omega_0 x^4}{24} + C_3 x = \frac{+\omega_0 L^4}{24} + c_3 L \Rightarrow v = \frac{-\omega_0}{24EI}(L_x^3 - 2L_x^3 + x^4) \quad (B)$$

$$at\ x = L/2 \Rightarrow v_{\max} = \frac{5w_0 L^4}{384EI}$$

حل با استفاده از معادله دی‌فرانسی‌ل درجه چهار

ب) $EL\frac{d^4v}{dx_4} = q = -\omega_0 \rightarrow EL\frac{d^3v}{dx^3} = -\omega_0 x + C_1$

$$EL\frac{d^2v}{dx^2} = -\omega_0 x^2 \Big/ 2 + c_1 x + c_2$$

روش مرزی $\begin{cases} M(0) = 0 \quad ,or \quad ,EIv''(0) = 0, & \Rightarrow C2 = 0 \\ M(L) = 0 \quad ,or \quad ELv''(L) = 0 = \end{cases}$

$$= -\omega_0 L^2 \Big/ 2 + C_1 L \Rightarrow C_1 = \omega_0 L \Big/ 2$$

حداکثر تغییر مکان در $x = L/2$ رخ می دهدبا قرار دادن این مقدار در رابطه B مقدار

دنباله مسئله مطابق حالت الف می باشد حداکثر تغییرمکان به دست می آید:

$$|v|_{\max} = 5\omega_0 L^4 \Big/ 384EI$$

تیرهای نامعین ارتجاعی

مثال:

واکنشهای تیر یکسر گیردار و یک سرسادهٔ زیر را پیدا کنید.

