الف

$$\begin{cases}\sigma_1,\sigma_2=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy^2}} \\ \sigma_1,\sigma_2=\dfrac{1120+420}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{1120-420}{2}\right)^2+280^2}=\begin{cases}1218.21\,kg/cm^2\leftarrow\sigma_1 & \max\ \sigma_x \\ 321.79\,kg/cm^2\leftarrow\sigma_2 & \min\ \sigma_y\end{cases}\end{cases}$$

ب

$$\begin{cases}\text{ب})\sigma_\theta=\dfrac{1120+420}{2}+\dfrac{1120-420}{2}\cos 90+280\sin 90=1050\ \ \dfrac{kg}{cm^2} \\ \tau_\theta=\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta-\tau_{xy}\cos 2\theta=350\ \ \dfrac{kg}{cm^2} \\ \theta=90+45=135\Rightarrow\begin{cases}\sigma'_\theta=\dfrac{1120+420}{2}+\dfrac{1120-420}{2}\cos 270+280\sin 270=440 \\ \tau'_\theta=\dfrac{1120-420}{2}\sin 270-280\cos 270=-350\end{cases} \\ 2\theta=270\end{cases}$$

ج

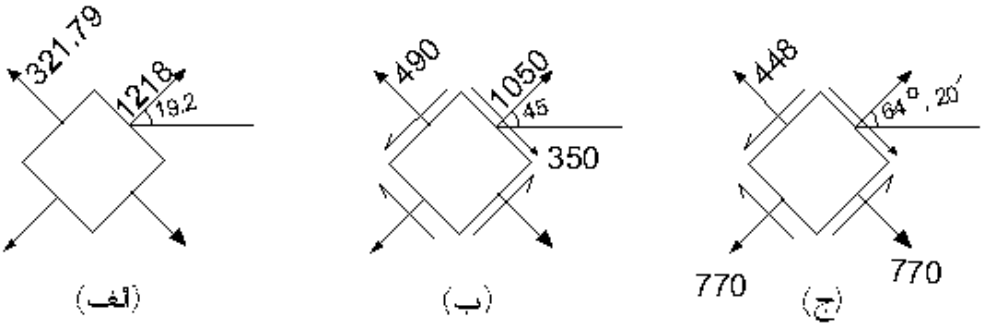
$$\tan 2\theta=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{2\times 280}{1120-420}=0.8\rightarrow\begin{cases}2\theta=38.56^0=38^0.33' \\ 2\theta=\pi/2+38.56=128.65=123^0.40\rightarrow\theta=64^0.20'\end{cases}$$

و يا

$$\sigma_\theta=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta=770\,kg/cm^2$$

$$\tau_\theta=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta-\tau_{xy}\cos 2\theta=448\,kg/cm^2$$

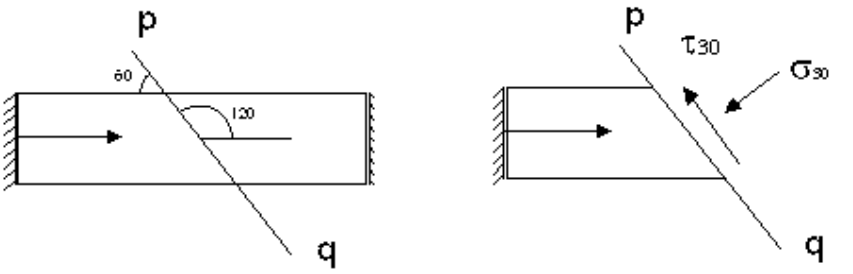
$$\tau_{\max}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=\frac{1218.21-321.79}{2}=448.21\,kg/cm^2=44.8\,N/mm^3$$



$$\tan 2\theta = -\frac{1120-420}{2\times 280} = \frac{-1}{0.8} \rightarrow \begin{cases} 2\theta = -51.34 = \pi - (51.34) = 128.65 \rightarrow \theta = 64.32^0 \\ 2\theta = 128.65 + 180 \rightarrow \theta = 154.32^o \end{cases}$$

مثال)یک میله فلزی در درجه حرارت $21^0 c$ دقیقاً دربین تکیه گاههای صلب قرار می گیرد. اگر درجه حرارت به $93^0 c$ افزایش یابد تنش های عمودی و برشی را در مقطع مایل pq حساب کنید.

ضریب انبساط حرارتی فلز میله $\alpha = 11.7\times 10^{-6} c^{-1}$ و ضریب ارتجاعی آن را $E = 2.1\times 10^6 \, {kg}/{cm^2}$ فرض کنید.



اگرمیله آزاد بود به اندزاه $\delta = l\alpha\Delta T$ ازدیاد طول پیدا می کرد ولی چون دو طرف بسته می باشد

درآن تنش فشاری σ_X ایجاد می گردد.

$$\delta = \frac{PL}{AE} \Rightarrow P = \frac{AE\delta}{L}$$

$$\theta = 30^0 \Rightarrow 2\theta = 60^0$$

$$\sigma_X = \frac{P}{A} = \frac{AE\delta/L}{A} = \frac{E\delta}{L} = \frac{E(L\alpha\Delta T)}{L} = E\alpha\Delta T$$

$$\text{or} \quad \varepsilon = \delta/l \Rightarrow \sigma = E.\underbrace{\varepsilon}_{\varepsilon=\alpha\Delta T} = E\alpha\Delta T \qquad or \qquad \varepsilon_X = 0 = \frac{\sigma_X}{E} + \alpha\Delta\mathrm{T} \Rightarrow \sigma_x = -E\alpha\Delta\mathrm{T}$$

$$\sigma_x = E\alpha\Delta T = -(2.1\times10^6)(11.7\times10^{-6})(93^0 - 21^0) = -1769\,kg/cm^2 = 176.9\,N/mm^2$$

تنش عمودی $\sigma_{x'} = \underbrace{\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}}_{\text{ثابت}} + \underbrace{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta}_{60^o} + \underbrace{\tau_{xy}\sin 2\theta}_{\text{ثابت}}$

$$\sigma_{x'} = \frac{-1769}{2} + \frac{1769}{2}\cos 60 = -1326.75\,kg/cm^2 = -132.67\,N/mm^2$$

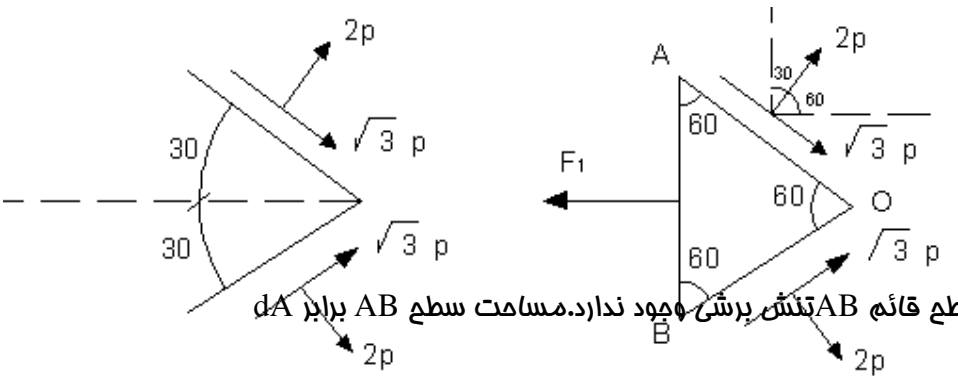
تنش $\tau_{x'y'} = \underbrace{\frac{-\sigma_x - \sigma_y}{2}}_{\text{ثابت}}\sin 2\theta + \underbrace{\tau_{xy}}_{\text{ثابت}}\cos 2\theta = \frac{+1769}{2}\sin 60^0 = 766\,kg/cm^2 = +76.6\,N/mm^2$

ش

دراینجا $\theta = 30$ اما در مسئله قبل $\theta = 30 + 90$

مثال :

مقدار وجهت تنش ها روی دو صفحه دریک نقطه می باشد. مقدار و جهت تنش های اصلی را در نقطه مزبور تعیین کنید



روی سطح قائم ABتنش برشی وجود ندارد.مساحت سطح AB برابر dA

معادله تعادل عنصرOABرا درامتداد افق می نویسیم تا σ_1(تنش اصلی) بد ست می آید:

$$F_1 dA = 2(2p)dA\cos 60^0 + 2\left(\sqrt{3}p\right)dA\cos 30^0 \Rightarrow \sigma_1 = 5p_1$$

چون مثلث OAB متساوی الاضلاع پس مساحت سطحOA وCBنیز برابر dA می باشد.درOH تنش برشی وجود ندارد.

$$\sigma_2 \frac{\sqrt{3}}{2} dA - 2PdA\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3}pdA\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \sigma_2 = P$$ معادله تعادل در امتداد قائم

بنابراین صفحه و اصلی صفحه های افقی و قائم می باشند وتنش های اصلی در روی عنصر شکل زیر مشخص شده است.

مثال) میله ای با سطح مقطع دایره ای بوسیله نیروی 15t کشیده می شود. تنش برشی در روی هیچ یک از سطوح نباید از $600^{kg}/_{cm^2}$ تجاوز کند. قطر میله را حساب کنید.

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V \times \pi \frac{R^2}{2} \times 4\frac{R}{3}}{\pi \frac{R^4}{4} \times 2R} = 600 \rightarrow \frac{V \times 4}{3\pi R^2} = 600$$

مثال) یک میله فولادی با مقطع مربع وضلع 25mm تحت نیروی فشاری محوری 50KN قرار دارد.تنشهای عمودی و برشی را در روی صفحه ای که نسبت به خط اثر نیروی فشاری زاویه 30^0 تشکیل می دهد پیدا کنید.

$$\sigma = -20Mpa$$
$$\tau = -94.6$$

عنصری در تنش سطح مطابق شکل قرار دارد.

الف) با استفاده از دایره موهر تعیین کنید

تنشها و صفحه های اصلی

ب)تنشها در روی صفحه ای که به اندازه 45^0 دوران کرده است.

پ) تنش های برشی ماکزیمم.

