تنشهای اصلی (PRINCIPAP)

$\sigma_{x'} = \sigma_1$ *Max*

$\sigma_{y'} = \sigma 2$ *Min*

$$????A = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2} + \tau^2{}_{xy}}$$

$$\cos 2\theta = \frac{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}}{\sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy^2}}} \quad \text{(II)} \qquad \sin 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau x^2 y}} \text{(I)}$$

با جایگذاری روابط I و II در (1) و (3) داریم.

$$(\sigma_{x'})^{\max}_{\min} = \sigma_1 \quad \text{یا} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2}$$

اگر زاویه نداشته باشیم ازاین رابطه استفاده می کنیم.

حداکثر تنشهای برشی

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \qquad (2)$$

اگر از رابطه (2) نسبت به θ، مشتق بگیریم و مقدار مشتق را مساوی صفر قراردهیم.

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$\tan 2\theta = -\frac{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}}{\tau_{xy}} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

زاویه بین صفحات تنش برشی حداکثرویا حداقل باصفحات تنشهای اصلی مساوی ۴۵ درجه می باشد .

$$\tau_{\min}^{\max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy^2}} \quad \text{تنشهای برشی حداکثر مصداق} \qquad (3)$$

تنش های قائمی که در روی صفحات تنش های برشی حداکثر عمل می کنند برابرند با:

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

بنابراین با حداکثر تنش برشی همیشه یک تنش قائم همراه خواهد بود مگر اینکه

$$\sigma_x + \sigma_y = 0$$

اگر σ_x, σ_y رادر رابطه (۳) قرار دهیم ،

تنشهای اصلی

شود اگر تنش های اصلی را در رابطه (3) قرار دهیم، τ_{xy} مساوی صفر شود آنگاه :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma 1 - \sigma 2}{2}$$

در صفحه ای که تنشهای اصلی (σ_2, σ_1) در آن قرار گیرد تنش برشی صفر می شود.

$$0 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

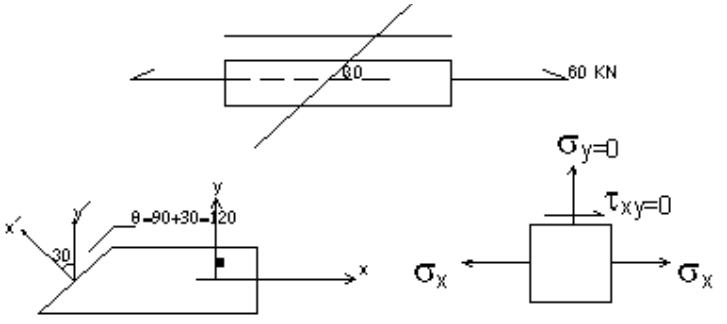
$$0 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\tan 2\theta + \tau_{xy} \rightarrow \tan 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \rightarrow$$

صفحه ای که تنشهای برشی درآن صفر است.

مثال) میله ای به سطح مقطع $850mm^2$، تحت اثر نیروی کششی 60KN قرارگرفته است.

الف)تنش عمودی و برشی را در روی صفحه ای با زاویهٔ 30^0 نسبت به محور میله پیدا کنید.

ب) ماکزیمم تنش برشی چقدر است.



$$\theta = 120 = 90 + 30 \Rightarrow 2\theta = 240$$

حل) الف)

اگربگویند نسبت به دستگاه مختصات ، صفحه را 30^0 درجه دوران داده ایم درآن موقع $\theta = 30^0$ است.

درجهت xهاتنش داریم (تنش محوری) $\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{60\times10^3}{850mm^2} = 70.6 \quad \frac{N}{mm^2} \leftarrow$

$$\sigma_{x'} = \underbrace{\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}}_{70.6} + \underbrace{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}_{70.6}\cos 2\theta + \underbrace{\tau_{xy}}_{0}\sin\underbrace{2\theta}_{240^o} = 17.65$$ عمودی

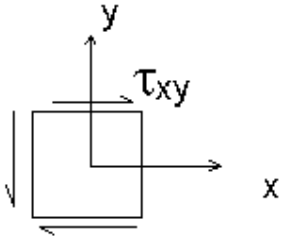
$$\tau_{x'y'} = -\underbrace{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}_{30.6}\sin\underbrace{2\theta}_{240^o} + \underbrace{\tau_{xy}}_{0}\cos\underbrace{2\theta}_{240^o} = 30.6 \quad N/mm^2$$ (برشی)

ب)

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \underbrace{\tau_{xy}}_{0}}$$

$$\tau_{\max} = \frac{70.6}{2} = 33.3 \quad N/mm^2$$

مثال) جهات ومقدار تنش های اصلی را به دست آورید.



$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

در اینجا σ_x و σ_y برابر صفرند وفقط تنش برشی داریم.

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\underbrace{\sigma_x}_{0} + \underbrace{\sigma_y}_{0}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy^2}} \Rightarrow \sigma_1, \sigma_2 = \pm\tau_{xy} \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \tau_{xy} \\ \sigma_2 = -\tau_{xy} \end{cases}$$

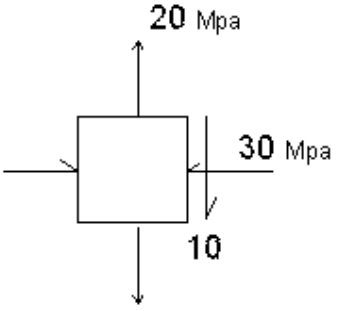
$$\tan 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\underbrace{\sigma_x}_{0} - \underbrace{\sigma_y}_{0}}{2}} = \infty = \tan 90^0 \qquad \begin{cases} 2\theta_1' = 90 \rightarrow \theta_1' = 45^0 \\ 2\theta_1'' = \underbrace{270^0}_{180+90} \rightarrow \theta_1'' = 135^0 \end{cases}$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

2×45^{o}

$$\sigma_x = \tau_{xy} \sin 90 = +\tau_{xy}$$

مثال) تنش در $\theta = 60^0$ بدست آورید.



$$\sigma_x = -30 \qquad \sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_y = +20$$

$$\tau_{xy} = -10 \qquad \sigma_{x'} = \frac{-30+20}{2} + \frac{-30-20}{2}\cos 120 - 10\sin 120 = -1.16 \ \frac{N}{mm}$$

$$\theta = 60$$