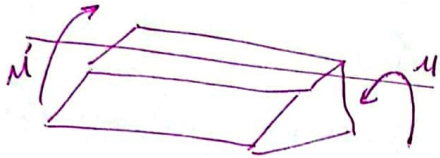


فصل چهارم: خمش خالص

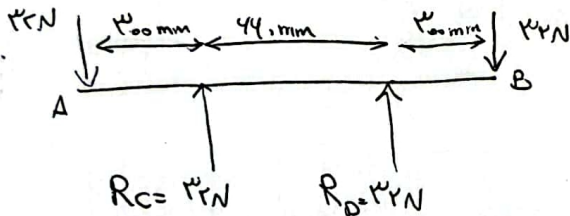
در فصل های قبل، تنش در عضوهای منسوری را که تحت بارگذاری محوری یا کوپل بیجسی بود را بررسی کردیم. در این فصل می خواهیم تنش و کرنش را در عضوهای منسوری که تحت خمش قرار دارند تحلیل کنیم. خمش مفهومی است که در طراحی اغلب اجزای مکانیکی و ساختمانی به کار می آید.

در این فصل، عضوهای منسوری تحت کوپل مساوی و مخالف M و M' که در مقطع طولی یکسان عمل می کنند، تحلیل می کنیم این عضوها در خمش خالص هستند.



نکته: خمش میله وزنه براری در بالای سر وزنه، کرنه ای از خمش خالص است این میله دارای وزنه های است که

به فواصل مساوی از است وزنه بردار قرار دارد به علت تقارن میله مطابق شکل (۲) واکنش دست ها با هم برابر و در دسری مخالف وزنه ها است بنابراین هنگام بررسی قسمت های مرکزی میله CD می توان وزنه ها و واکنش ها را با در کوپل مساوی و مخالف 9.4 N.m جایگزین کرد.



$$M = P \times x$$

خمش

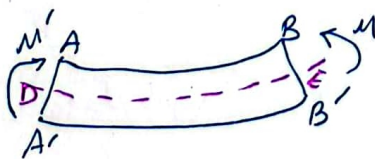
$$\left(\begin{array}{c} C \\ \hline D \end{array} \right) 9.4 \text{ N.m} = M'$$

$M = 9.4 \text{ N.m}$

شکل (۲)

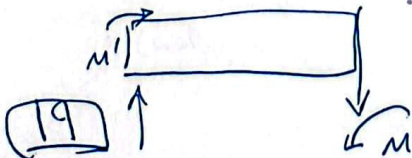
تغییر شکل عند تقارن در خمش خالص:

حال تغییر شکل یک عضو منسوری را که دارای مقطع تقارن است و در دو انتهای تحت کوپل M و M' است تحلیل می کنیم. این کوپل ها در مقطع تقارن عضو اثر می کند و منحنی می شود اما نسبت به مقطع تقارن است. به علاوه چون محور خنثی M در مقطع عرضی دارای مقدار یکسان است حذف AB به صورت یک دایره به مرکز C در می آید زمانی که M باشد حذف AB از حذف $A'B'$ کوتاه تر می شود.



در این حالت یک سطح به موازات وجه بالایی و پایینی وجود دارد که در آن ϵ و ρ منفی اند این سطح را خنثی می گویند.

البته خطوط AB و $A'B'$ به ترتیب منتهی و منتهی می شوند و کرنش ϵ و تنش σ در قسمت بالایی عضو منتهی (مشارعی) و در قسمت پایینی عضو $(A'B')$ مثبت (کششی) اند.



در سطح مقطع قبل قوس دایره‌ای ΔE ΔN سطح یا محور خنثی است

در یک شکل بارچ

C = فاصله محور خنثی از مرکزوار مقطع مرکبی

گشتاخی - گشتا در کوبل

$$\sigma = \frac{M C}{I}$$

تغییر بر حسب σ
محاسبه انحراف

برای شکل‌های با هندسه مستطیلی

$$I = \frac{1}{12} b h^3$$

ارتفاع h
عرض b

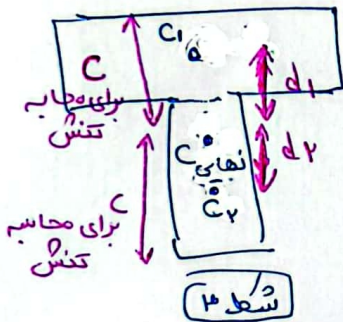
برای محاسبه سطح انحنای: $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$
که $\frac{1}{\rho}$ = شعاع انحنای بر حسب متر
گام دوم یافت

اگر شکل مرکب بود ترکیبی از چند مستطیل (طول و عرض)

$$I = \left(\frac{1}{12} b_1 h_1^3 + A d_1^2 \right) + \left(\frac{1}{12} b_2 h_2^3 + A d_2^2 \right) + I_3 + \dots + \dots$$

I_1 I_2

که در این رابطه‌ها محاسبه از اهمیت بالایی برخوردار است. در این حالت ما از یک جدول استفاده می‌کنیم.



مساحت	C یا $\bar{y}$	$\bar{y} A$
①	فاصله مرکز هر هندسه تا پایین شکل	حاصل ضرب
②		در ستون قبل
جمع		

$$\sum \bar{y} A = \bar{y} \sum A$$

$$\bar{y} = \bar{C}$$

به دست می‌آید و

$$d_1 = \bar{y}_1 - C$$

$$d_2 = \bar{y}_2 - C$$

در این حالت در هندسه‌های مرکب ما تنش‌های فاصله‌ای داریم با توجه به هندسه و ال

تنش در (مقطع بالا در این مثال صفر) کششی است پس منطوق سطح ①
که در این حالت محاسبه C ما در هندسه یک شکل نخواهد بود

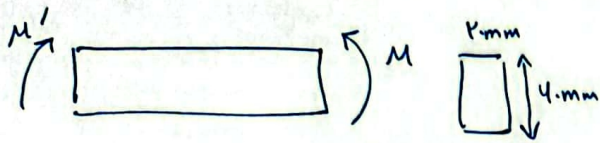
$$\sigma = \frac{M C}{I}$$

C در این رابطه یعنی فاصله C از ابتدای شکل ① خواهد بود

و در مقطع پایین‌تری داریم که C در این حالت فاصله C از ابتدای شکل ② خواهد بود

(مطابق شکل ۳)

مثال ۱) میل فولادی با مقطع مربعی مستطیلی $20 \times 40 \text{ mm}$ تحت دو گوی مساری و متمم‌دار است این گوی‌ها در صفحه تقارن عمودی میل اثر می‌کنند مقدار لنگر خمشی M را که باعث تسلیم می‌شود بیابید. $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$

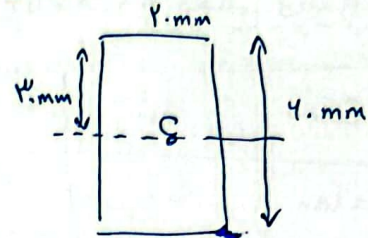


حل: چون محور خمشی از مرکز سطح هندسی عبور می‌کند

بنابراین $c = 40 \text{ mm}$ و از طرفی همان اینرسی مقطع مربعی مستطیلی نسبت به محور مرکزی:

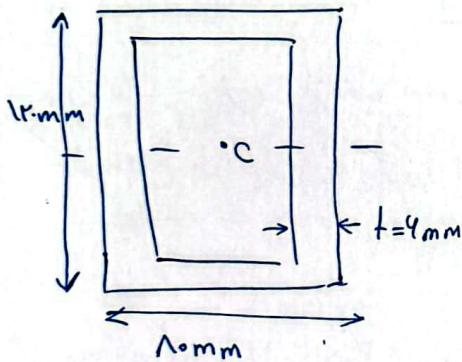
$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} \times 20 \times 40^3 = 34 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$M = \frac{I}{c} \sigma_m = \frac{34 \times 10^{-9}}{0.04} \times 250 \times 10^6 = 3 \text{ kN.m}$$



مثال ۲) لوله مستطیلی نشان داده شده از آلومینیوم $\sigma_y = 275 \text{ MPa}$ و $\sigma_u = 415 \text{ MPa}$ و $E = 73 \text{ GPa}$ ساخته شده است. مطلوب است: لنگر خمشی M برای ضریب اطمینان ۳

(به سطح انحنای لوله)



حل: همان اینرسی: $\frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} \times 120 \times (120)^3 = 4,147,200 \text{ mm}^4$

تنش مجاز برای ضریب اطمینان ۳ و تنش نهایی 415 MPa

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_u}{F.S} = \frac{415 \text{ MPa}}{3} = 138 \text{ MPa}$$

(یادآوری مهم) تنش نهایی یا همان استقامت نهایی فعل اول است و پس همان تنش تسلیم

چون σ_{all} از σ_y کوچکتر است لوله در ناحیه الاستیک قرار دارد بنابراین می‌توان از فرمول

$$\sigma_{all} = \frac{M c}{I}$$

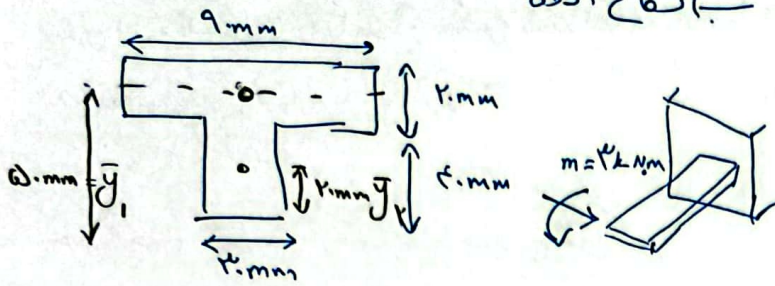
استفاده کرد که در آن $c = 120 \div 2 = 60 \text{ mm}$

$$M = \frac{I}{c} \sigma_{all} = \frac{4,147,200}{60} \times 138 \times 10^6 = 10,116 \text{ kN.m}$$

(به سطح اندوا):

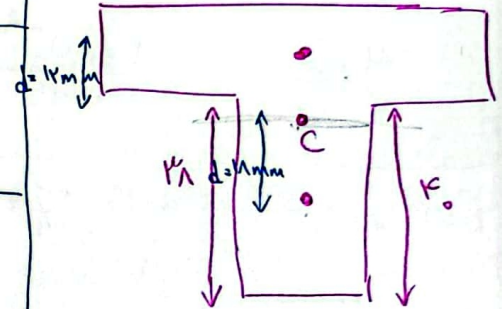
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{10,116}{73 \times 10^9 \times 4,147,200} = 3.14 \times 10^{-8} \text{ m}^{-1} \Rightarrow \rho = \frac{1}{3.14 \times 10^{-8}} = 31,7 \text{ m}$$

مثال ۳) مقطع مکانیکی چوبی تحت کوبش 3 kN.m قرار دارد. اگر $E = 145 \text{ GPa}$ (الف) ماکزیمم تنش های کششی و فشاری در مقطع (ب) ضلع انحناء



حل: مرکز سطح مقطع مرکبی T شکل مقطع را به دو مستطیل نشان داده شده تقسیم می کنیم و می نویسیم

مساحت mm^2	$\bar{y} \text{ mm}$	$\bar{y} A \text{ mm}^3$
$2 \times 9 = 18$	5	9×1.3
$2 \times 2 = 4$	2	2×1.3
$\Sigma A = 22$		$\Sigma \bar{y} A = 11.3 \times 10^3$



مان اینرسی مرکبی: از قیاس صورتهای موازی برای تقسیم مان اینرسی هر یک از مستطیل ها نسبت به محور x که از

مرکز سطح مقطع مرکب می گذرد استفاده می کنیم و پس آنها را با هم جمع می کنیم

$$I_{x'} = \Sigma (\bar{I} + A d^2) = \Sigma \left(\frac{1}{12} b h^3 + A d^2 \right)$$

$$= \left(\frac{1}{12} \times 9 \times 2^3 \right) + (9 \times 2) (11.3)^2 + \left(\frac{1}{12} \times 2 \times 4^3 \right) + (2 \times 4) \times (18)^2 = 1848 \times 10^{-9} \text{ mm}^4$$

$$I = 1848 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

الف) ماکزیمم تنش کششی چون کوبش وارده باعث خمش مقطع به طرف پایین می شود مرکز انحناء در پایین مقطع مرکبی قرار دارد ماکزیمم تنش کششی در نقطه A (درترین نقطه از مرکز انحناء) ایجاد می شود.

$$\sigma_A = \frac{M C_A}{I} = \frac{3 \text{ kN.m} \times 0.22}{1848 \times 10^{-9}} = 74 \text{ MPa}$$

و ماکزیمم تنش فشاری این تنش هم در نقطه B بر روی می دهد.

$$\sigma_B = \frac{M C_B}{I} = \frac{3 \text{ kN.m} \times 0.38}{1848 \times 10^{-9}} = -141.3 \text{ MPa}$$

ب) ضلع انحناء

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E I} = \frac{3 \text{ kN.m}}{145 \times 10^9 \times 1848 \times 10^{-9}} = 2.095 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

$$\sigma = 477.12 \text{ m}$$

بتمیز در خانه : دنیوی عمودی بر تیر با مقطع منفرجه شده دارد سده اند ما نیز هم کشش های
کشش های را در قسمت BC تقریباً ۱۳

صطابق مسئله ۴-۷ حل الماسی

