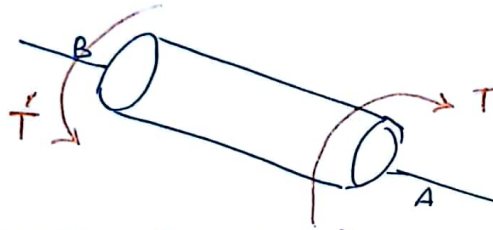


فصل دوم پیچش

در دو فصل قبلی، نحوه محاسب تنش ها و کرنش ها را در عضوهای که تحت بارهای محوری قرار داشتیم مطالعه کردیم. در این فصل عضوهای ساختاری و مکانیکی را تحت پیچش بررسی و تنش و کرنش در عضوها با مقطع عرضی دایره ای را بررسی می کنیم. تحت کوبل های پیچشی T و T' تحلیل می کنیم این کوبل ها دارای مقدار یکسان T در حدودی مخالف اند و کمیت برداری هستند و با بیضی های خمیده یا بردارهای کوبل مانند شکل زیر نشان داده می شوند.



در اغلب کاربردهای مهندسی با عضوهای تحت پیچش مواجه می شویم، مقدار تیرین آنها **شفت** است که برای انتقال **قدرت** از نقطه ای به نقطه دیگر به کار می رود. به عنوان مثال یکی از پرکاربردترین مدل شفت، شفتی است که برای انتقال قدرت از موتور به جرف ~~های~~ های عقب ماشین استفاده می شوند. شفت ها به حد صورت توخالی و توپر هستند.

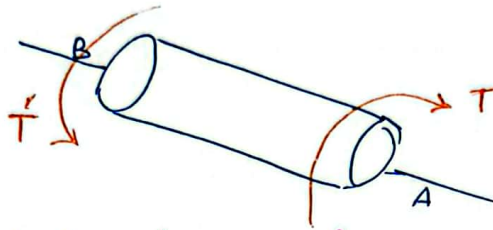
برای بهتر فهمیدن مفهوم پیچش ابتدا، تنش و تغییر شکل در شفت های دایره ای را تحلیل می کنیم؛ وقتی یک شفت دایره ای تحت پیچش قرار می گیرد، تمام مقطع عرضی به صورت صفحه ای و بدون اعوجاج می ماند؛ یعنی درجه مقاطع عرضی مختلف شفت تحت زوایای متفاوت در امتداد شفت می چرخند، ولی این چرخش صلب گونه است با این تقاسیم کرنش بر حسب ضابطه از محور شفت به طور خطی تغییر می کند بنابراین این تغییر شکل در نامیه الاستیک است و از قانون هوک برای تنش و کرنش، توزیع تنش در یک شفت دایره ای استفاده می شود و فرمول پیچش الاستیک به دست می آید.

تغییر شکل در یک شفت دایره ای:

یک شفت دایره ای را در نظر بگیرید که از یک انتهابه یکله ماه ثابتی متصل است. اگر گشتاور آبرانت های دیرین دارد شود شفت می پیچد و انتهای آن تحت زاویه ϕ می گردد. به زاویه پیچش دوران می گند. اگر ماشین ها نشان می دهد که برای گند معنی از مقایسه T زاویه پیچش ϕ با T و طول L شفت تغییر می کند. به عبارت دیگر اگر طول شفت تغییر کند مثلاً در برابر شود تحت گشتاور یکسان T برای زاویه پیچش در برابر می شود.

فصل سوم پیچش

در دو فصل قبل، نحوه محاسبه تنش ها و کرنش ها در عضوهای که تحت بارهای محوری قرار داشتیم معادله کیریم در این فصل عضوهای ساختمانی و مکانیکی را تحت پیچش بررسی و تنش و کرنش در عضوها با مقطع عرضی دایره ای را با محور تحت کوبل های پیچشی T و T' تحلیل می کنیم این کوبل ها دارای مقدار یکسان T در دوروی مخالف اند و کمیت برداری هستند و با بیضی های خمیده یا بردارهای کوبل مانند شکل زیر نشان داده می شوند.



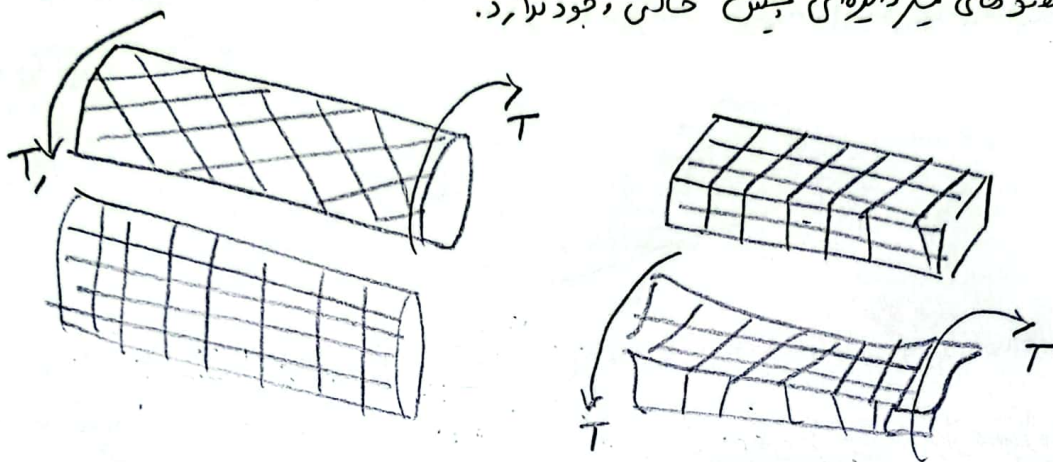
در اغلب کاربردهای مهندسی با عضوهای تحت پیچش مواجه می شویم، مقدار تیرین آنها **شفت** است که برای انتقال **قدرت** از نقطه ای به نقطه دیگر به کار می رود. به عنوان مثال یکی از پرکاربردترین مدل شفت، شفتی است که برای انتقال قدرت از موتور به جرخ ~~های~~ **شفت** های عقب ماشین استفاده می شوند. شفت ها به حد صورت توخالی و توپر هستند.

برای بهتر فهمیدن مفهوم پیچش ابتدا تنش و تغییر شکل در شفت های دایره ای را تحلیل می کنیم، وقتی یک شفت دایره ای تحت پیچش قرار می گیرد، تمام مقطع عرضی به صورت صفحه ای و بدون اعوجاج می ماند یعنی درجه مقاطع عرضی مختلف شفت تحت زوایای متفاوت در امتداد شفت می چرخند، ولی این چرخش صلب گونه است با این تقاسیم کرنش بر حسب ضابطه از محور شفت به طرف حلقی تغییر می کند بنابراین این تغییر شکل در نامه الاستیک است و از قانون هوک برای تنش و کرنش، توزیع تنش در یک شفت دایره ای استفاده می شود و فرمول پیچش الاستیک به دست می آید.

تفسیر شکل زیر شفت دایره ای:

یک شفت دایره ای را در نظر بگیرید که از یک انتهای به یک ماه ثابت متصل است. اگر گسترده آبرانه های دیگر آن دارد شود شفت می پیچد و انتهای آن تحت زاویه ϕ می شود به زاویه پیچش دوران می کند. اگر ماشین ها نشان می دهد که برای گسترده معاینه از معاینه T زاویه پیچش ϕ با T و طول L شفت تغییر می کند. به عبارت دیگر اگر طول شفت تغییر کند مثلاً در برابر شود تحت گسترده یکسان T دارای زاویه پیچش در برابر می شود.

یکی از خواص مهم شفت دایره‌ای این است که وقتی یک شفت دایره‌ای تحت پیچش قرار می‌گیرد تمام مقطع عرضی آن به صورت صفحه‌ای و بدون اعوجاج می‌ماند. یعنی در هر مقطع عرضی مختلف در امتداد شفت تحت زوایای مختلف می‌پیچد و این پیچش صلب گونه است. این موضوع برای تغییر شکل یک مدل الاستیک که تحت پیچش است تا از زرادنه شده است اما خاصیت مذکور، مشخصه شفت‌های دایره‌ای کوخالی و توپر است و در عضوهای غیر دایره‌ای چنین حالتی وجود ندارد.



حال توزیع کرنش برشی در یک شفت دایره‌ای به طول L و شعاع ρ که تحت زاویه ϕ چرخیده است را بررسی می‌کنیم

در یک شفت دایره‌ای با اعمال گشتاور سطوح مقطع دایره‌ای A به صورت یک بیضی در می‌آید و کرنشی در این حالت ϕ است که با تغییر زاویه بین خطوط AB و $A'B'$ برابر است

ϕ (بر حسب رادیان) است

$$\phi = \frac{\rho \phi}{L}$$

ϕ کرنش برشی رادیان

ρ شعاع شفت و L طول شفت است

ϕ تغییر زاویه بر حسب رادیان

بررسی تنش در یک شفت دایره‌ای (نکته: کلاً در نامه الاستیک بررسی می‌شود)

① $\sigma = G \phi$ کرنش $\rightarrow$ تنش برشی
 با سکان
 مدول صلابت یا مدول برشی ماله

تقسیم $\gamma = \frac{\rho Q}{L}$ اگر $\rho = C$ باشد آنجا ما ماکزیمم کرنش را خواصیم داشت

$$\gamma_{max} = \frac{CQ}{L} \quad (۳)$$

با برابر گذاشتن معادله های ۲ و ۳، ساده کردن آن‌ها به معادله مهم $\gamma = \frac{\rho}{C} \gamma_{max}$ (۴)

از طرفی در رابطه تنش داریم (۵) $\gamma = C$ با جایگزینی γ در رابطه (۴) در رابطه تنش (۵) خواصیم داشت:

$$C = \frac{\rho}{C} C_{max} \quad (۴)$$

نکته مهم در این شفت دایره ای کوخالی به شعاع داخلی C_1 و شعاع خارجی C_2 خواصیم داشت

$$C_{min} = \frac{C_1}{C_2} C_{max} \quad (۷)$$

یعنی تنش در شعاع خارجی بیشترین مقدار تنش و تنش در شعاع داخلی کمترین مقدار تنش در شفت را ایجاد می کنند

و در نهایت فرمول پیچش الاستیک $C_{max} = \frac{T C_2}{J}$ و $C = \frac{T \rho}{J}$ که در این رابطه T گشت آرد

و J همان اینرسی قطبی و ρ شعاع مقطع C شعاع کامل شفت است (دایره)

از دایره $J = \frac{1}{2} \pi C^4$ و برای یک دایره کوخالی به شعاع داخلی C_1 و شعاع خارجی C_2 برابر با

$$J = \frac{1}{2} \pi C_2^4 - \frac{1}{2} \pi C_1^4 = \frac{1}{2} \pi (C_2^4 - C_1^4) \quad (۱۱)$$

مثال ۳-۱) یک شفت فولادی استوانه ای کوخالی به طول ۱.۵m و با قطرهای داخلی ۴۰mm و خارجی ۶۰mm است. اگر خواصیم تنش برشی ۱۲۰MPa بیشتر نشود ماکزیمم گشت آردی که می توان وارد کرد چقدر است؟ (ب) مینیمم مقدار تنش برشی متناظر در شفت چقدر است؟

$$C_{max} = \frac{T C_2}{J} \Rightarrow T = \frac{J C_{max}}{C_2}$$

برای C_{max} باید $C = 40mm$ و برابر شعاع خارجی باشد.

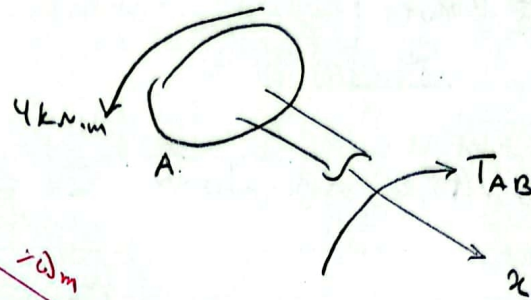
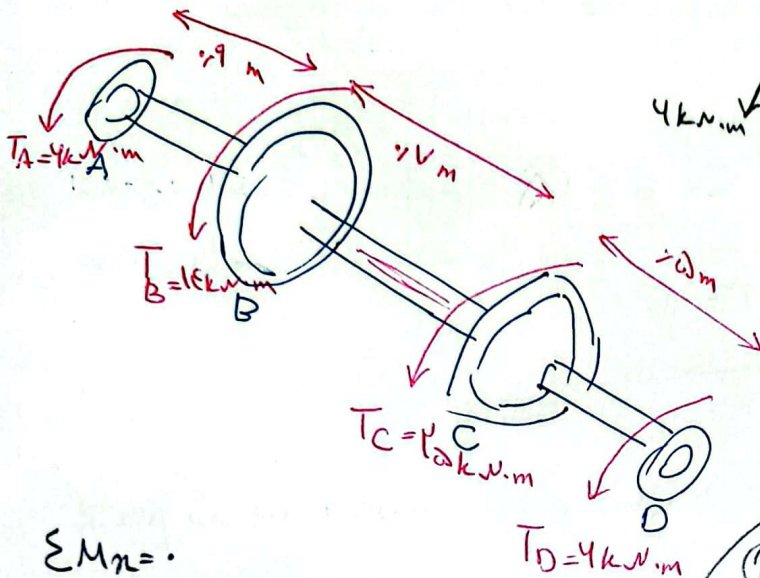
$$J = \frac{1}{2} \pi (0.06^4 - 0.04^4) = 1.021 \times 10^{-4} m^4$$

$$C_{max} = 120 \times 10^6 Pa$$

$$T = \frac{1.021 \times 10^{-4} \times 120 \times 10^6}{0.04} = 3108 kN.m$$

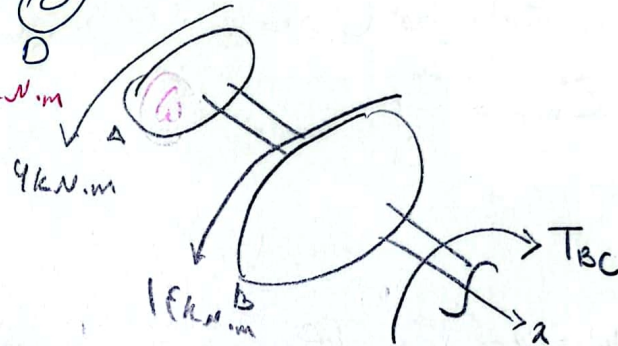
$$C_{min} = \frac{C_1}{C_2} C_{max} = \frac{0.04}{0.06} \times 120 = 80 MPa$$

مسئله ۳۴۲) شفت BC کوکالی و با قطر داخلی و خارجی ۴۰mm و ۱۲mm است شفت های AB و CD کوکری هستند و قطر آنها برابر است برای بارگذاری نشان داده شده معلوم است (الف) ماکزیمم تنش برشی در شفت BC و (ب) قطر d در صورتی که تنش برشی مجاز در این شفت ۴۵MPa باشد.



$$\sum M_x = 0 \quad 4 - T_{AB} = 0 \quad T_{AB} = 4 \text{ kN.m}$$

$$\begin{aligned} \sum M_x &= 0 \\ 4 + 18 - T_{BC} &= 0 \\ T_{BC} &= 22 \text{ kN.m} \end{aligned}$$



$$\tau_{max} = \frac{T_{BC} C_r}{J}$$

$$J = \frac{1}{2} \pi (0.04^4 - 0.02^4) = 1.492 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\tau_{max} = \frac{22 \times 0.02}{1.492 \times 10^{-4}} = 294.2 \text{ MPa}$$

$$C_r = 0.02 \text{ m} \quad T_{BC} = 22 \text{ kN.m}$$

$$\tau_{min} = \frac{C_i}{C_r} \tau_{max} = \frac{0.02}{0.04} \times 294.2 = 147.1 \text{ MPa}$$

(ب) در شفت های AB و CD شفت کوکری به قطر d است بنابراین

$$\tau = \frac{T_{AB} C}{J}$$

$$45 \times 10^6 = \frac{4 \times C}{\frac{1}{2} \pi C^4} \Rightarrow 45 \times 10^6 = \frac{4}{\frac{31.4}{2} C^3} \Rightarrow C = 38.19 \times 10^{-3}$$

$$d = 2C = 2 \times 38.19 \times 10^{-3} = 76.38 \text{ mm}$$

مسال ۱۲-۴ - شفت بزرگی که موقودی را به مولدی وصل می کند با قطرهای داخلی ۵۰ mm و ۵۰ mm دارد. اگر تنش مجاز برشی ۸۴ MPa باشد معلوم است. ماکزیمم گشت آوری که (الف) توسط این شفت می توان انتقال داد. (ب) توسط یک شفت توپر اما با همین وزن می توان انتقال داد. (ج) توسط یک شفت کوفالی با همان وزن و با قطر خارجی ۲۰۰ mm می توان انتقال داد.

(الف)

$$J = \frac{\pi}{32} (C_1^4 - C_2^4) = \frac{\pi}{32} (75^4 - 50^4) = 39,188 \times 10^{-4} m^4$$

$$\tau_{max} = \frac{T C_1}{J} \Rightarrow 18 \times 10^6 = \frac{T (75) \times 10^{-3}}{39,188 \times 10^{-4}} \Rightarrow T = 44,17 kN.m$$

با زنی که وزن شفت را نگه می دارد عرض هم تغییر نمی کند بنابراین

$A_{\text{کوفالی}} = A_{\text{توپر}}$

$$\pi (75^2 - 50^2) = \pi C_3^2 \Rightarrow C_3 = 55,9 mm$$

$$\tau_{max} = \frac{T C_3}{J} \Rightarrow 18 \times 10^6 = \frac{T (55,9 \times 10^{-3})}{\frac{\pi}{32} (55,9^4 - 50^4)} \Rightarrow T = 24,1 kN.m$$

(ج) شفت کوفالی با قطر ۲۰۰ mm برای وزن مساوی عرض تغییر نمی کند بنابراین:

$$\pi (75^2 - 50^2) = \pi (200^2 - C_4^2) \Rightarrow C_4 = 18,9 mm$$

$$J = \frac{\pi}{32} (200^4 - 18,9^4) = 13,189 \times 10^{-4} m^4$$

$$\tau_{max} = \frac{T C_4}{J} \Rightarrow 18 \times 10^6 = \frac{T \times 200 \times 10^{-3}}{13,189 \times 10^{-4}} \Rightarrow T = 49,4 kN.m$$

حال با استفاده از رابطه (۱) و رابطه (۹) خواهیم داشت:

$$\tau = G \gamma, \quad \tau = \frac{T \phi}{J} \Rightarrow G \gamma = \frac{T \phi}{J}$$

$$\gamma = \frac{\phi L}{L} \quad (۲)$$

$$G \frac{\phi L}{L} = \frac{T \phi}{J}$$

$$T = \frac{J G \phi}{L} \quad (۱۲)$$

مثال ۳-۴ برای زاویه پیچش 2° چه گشت آدزی باید به انتهای شفت وارد کرد؟

$G = 77 \text{ GPa}$ و برای مدل صلابت فولاد است.

$$T = \frac{J G \phi}{L} \quad G = 77 \times 10^9 \text{ Pa} \quad L = 1.5 \text{ m} \quad (\text{هر مثال ۱-۴ استفاده کنید})$$

$$\phi = 2 \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} \right) = 3.49 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad J = 1.021 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$T = \frac{1.021 \times 10^{-4} \times 77 \times 10^9 \times 3.49 \times 10^{-3}}{1.5} = 1.829 \text{ kN.m} \quad \text{نیابراین}$$

تمرین در خانه

۱- الف) شفت توخالی به قطر داخلی 4 mm و قطر خارجی 9 mm داده شده است. ماکزیمم تنش برشی را از محاسبه $T = 2400 \text{ N.m}$ است بیابید. (مسئله ۱ کتاب)

۲- گشت آدز را که باعث به وجود آمدن ماکزیمم تنش برشی 10 MPa در شفت استوانه‌ای فولادی شده است را بیابید.