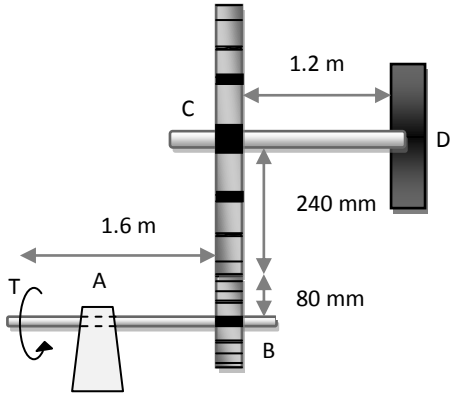


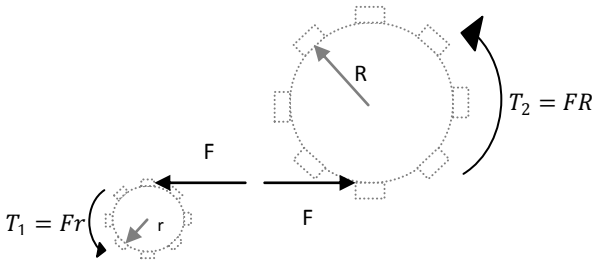
❖ ***مثال.*** *در دستگاه روبرو میله ی پایینی در نقطه A آزاد و در نقطه D گیردار است . قطر میله ی بالایی 60mm و قطر میله ی پایینی 42mm است. اگر* $T_A = 1.2\ kNm$ *و* $G = 77.2\ GPa$ *باشد،* φ_{A-D} *را حساب کنید.*

ابتدا φ_{A-B} را حساب می‌کنیم، اگر جهت اعمال گشتاور را مثبت بگیریم:



$$\varphi_{A-B} = \frac{+1200 \times 1.6}{77.2 \times 10^9 \times \frac{\pi}{2} \times 21^4 \times 10^{-12}} = 0.081 \text{ rad}$$

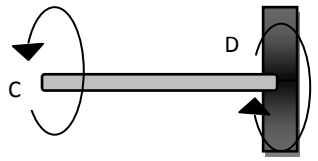
حال φ_{C-D} را حساب می‌کنیم. برای این کار باید گشتاور وارد بر چرخ‌دنده C را بدست آوریم. همان‌طور که پیش تر اشاره کردیم، نیرویی که چرخ‌دنده‌ها در محل تماس به هم وارد می‌کنند بر اساس قانون سوم نیوتن با هم برابرند. از طرفی چون دستگاه در حالت تعادل است گشتاوری که به چرخ‌دنده B از طریق این نیرو وارد می‌شود باید برابر با T باشد. دستگاه را از زاویه A بررسی می‌کنیم:



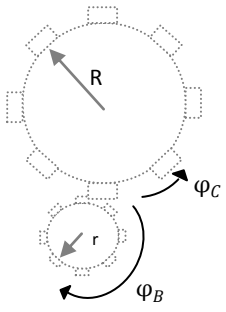
$$T_1 = F \times 0.08 = 1200 \quad \rightarrow \quad F = 15\ kN$$

$$T_2 = 15000 \times 0.24 = 3600\ Nm$$

$$\varphi_{C-D} = \frac{-3600 \times 1.2}{77.2 \times 10^9 \times \frac{\pi}{2} \times 30^4 \times 10^{-12}} = -0.044 \text{ rad}$$



برای برای محاسبه φ_{A-D} باید به نکته دیگری نیز توجه کنیم که چرخ‌دنده C با چرخیدن، چرخ‌دنده B را نیز می چرخاند . برای محاسبه φ_B میزان چرخش B از روی φ_{C-D} که میزان چرخش C است باید توجه کنیم که بخشی از محیط چرخ‌دنده‌ها که در تماس با هم حرکت می‌کند (s) در هر دو یکسان است. دقت داشته باشید که جهت چرخش چرخ‌دهنده ها مخالف است.

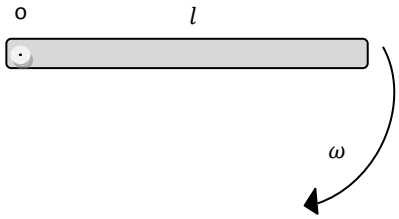


$$s = R\varphi_C = -r\varphi_B \quad \rightarrow \quad 0.24 \times -0.044 = -0.08 \times \varphi_B$$

$$\varphi_B = 0.132 \text{ rad}$$

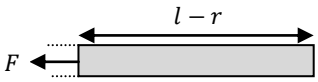
$$\varphi_{A-D} = \varphi_{A-B} + \varphi_B = 0.213\ rad$$

❖ ***مثال.*** *میله‌ای به طول l حول یک سر خود با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند. در لحظه نشان‌داده‌شده تغییر طول میله چقدر است؟*



هر جسم برای این که با سرعت زاویه ای ثابت ω حول نقطه‌ای دوران کند باید نیرویی معادل $F = ma$ که $a = r\omega^2$ شتاب مرکزگراست به آن وارد شود . در ایجا این نیرو در طول میله متغیر است چون r متغیر است.

برای محاسبه تغییر طول میله المان بسیار کوچکی در نظر می گیریم به طوری که بتوان نیروی دو طرف آن را برابر در نظر گرفت و به این طریق تنش را محاسبه نمود. با محاسبه تنش، کرنش را بدست می‌آوریم و با انتگرال‌گیری تغییر طول میله را محاسبه می‌کنیم.



ابتدا نیرو را در فاصله r حساب می‌کنیم :

$$dF = dm.x\omega^2 = (\rho A dx).x\omega^2$$

$$F = \int_r^l \rho A\omega^2 x dx = \frac{\rho A\omega^2}{2}(l^2 - r^2)$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\rho\omega^2}{2}(l^2 - r^2)$$

حال که تنش را در المان مورد نظر بدست آوردیم، برای هر المان تغییر طول dl را در نظر می‌گیریم:

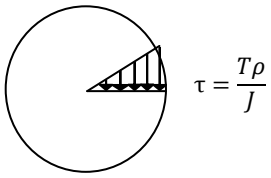
$$dl = \frac{\sigma dr}{E}$$

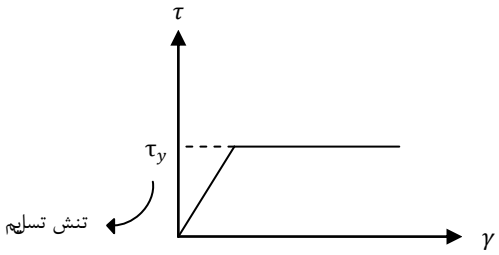
$$\Delta l = \int dl = \int_0^l \frac{\rho\omega^2}{2E}(l^2 - r^2)dr$$

$$\Delta l = \frac{\rho\omega^2 l^3}{3E}$$

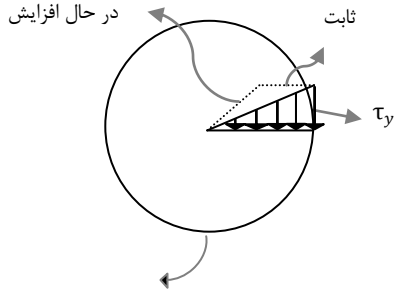
در ادامه مبحث پیچش حالت‌هایی را بررسی می‌کنیم که میله بر اثر تنش‌های برشی وارد مرحله پلاستیک می‌شود.

یادآوری: سیستم‌های نامعین تغییر طول های وابسته دارند که می توان ارتباط آن ها را از روی هندسه شکل بدست آورد . اگر این سیستم‌ها وارد مرحله پلاستیک شوند هنگام باربرداری باید قسمت های پلاستیک و الاستیک با هم به تعادل برسند . در این موارد اغلب تنش پسماند داریم.

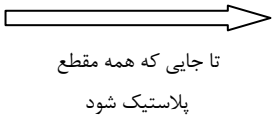


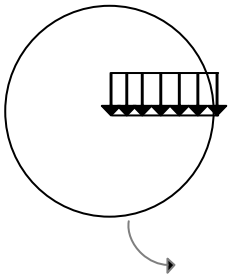


اگر سطحی‌ترین تنش برشی میله به تنش تسلیم برسد، میله از سطح به مرکز شروع به پلاستیک شدن می کند. از آنجا که تنش برشی سطح نمی تواند بیش از این مقدار شود، برای تولید گشتاور اعمال شده تنش های داخلی‌تر به ترتیب به تنش تسلیم می رسند. هنگامی که مرکزی‌ترین تنش به این مقدار رسید میله منهدم خواهد شد.



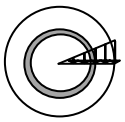
گشتاوری برابر T_y داریم. گشتاوری که به ازای آن در سطحی‌ترین نقطه تسلیم آغاز می‌شود.





گشتاوری برابر T_u داریم که حداکثر گشتاور قابل اعمال به میله پیش از گسیختگی است

$$dT = \tau dA.r = \tau(2\pi r dr).r$$

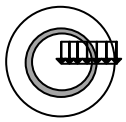


$$\tau = \frac{r}{c}\tau_y$$

$$T_y = \int_0^c 2\pi(\frac{r}{c}\tau_y)r^2 dr$$

$$T_u = \frac{\pi c^3}{2}\tau_y$$

$$dT = \tau_y dA.r = \tau_y(2\pi r dr).r$$



$$T_u = \int_0^c 2\pi\tau_y r^2 dr$$

$$T_u = \frac{2\pi c^3}{3}\tau_y$$

- در حالتی که $T_y < T < T_u$ باشد بخشی از مقطع، الاستیک و بخش دیگر وارد مرحله پلاستیک شده است.