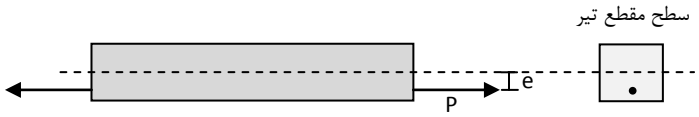
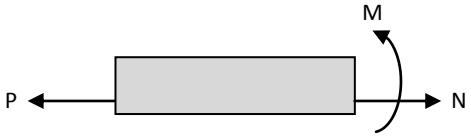
بارگذاری محوری خارج از مرکز:

بار محوری گذرنده از مرکز جرم تنها ایجاد کشش یا فشار می کند. در صورتی که بار محوری خارج از مرکز که گذرنده از مرکز جرم نباشد، علاوه بر تنش نرمال، ایجاد خمش نیز می‌کند.



برای تحلیل تیر فوق :

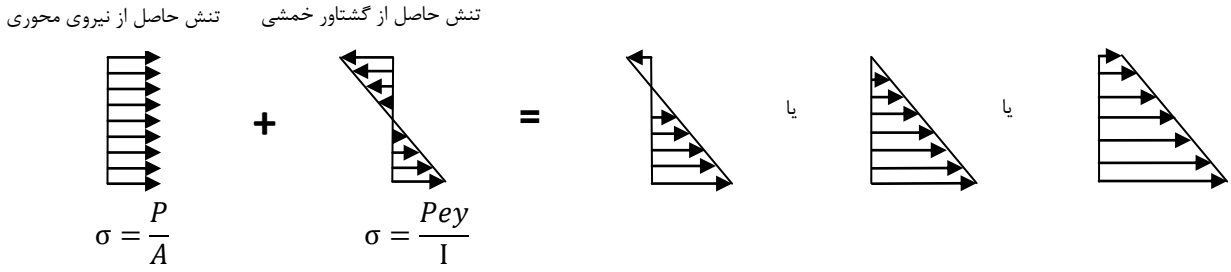


معادلات تعادل : $N = P$

$$M = P \times e \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{P}{A}$$

از آنجا که $\sigma = \frac{My}{I}$ داریم :

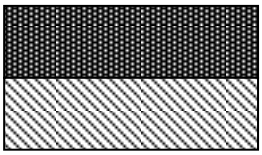
$$\sigma = \frac{Pey}{I}$$



بسته به مقدار عددی تنش‌ها، یکی از سه حالت زیر حاصل می‌شود.

خمش عضوهایی که از چند ماده ساخته شده‌اند:

رابطه $\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho}$ از اصل سازگاری بدست آمده و به جنس جسم بستگی ندارد.



$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_1 = E\varepsilon_1 \\ \sigma_2 = E\varepsilon_2 \end{cases}$ بسته به اینکه المان مورد نظر در کدام قسمت جسم واقع است . $\rightarrow$

$$N = \int_A \sigma_T dA = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{A_1} -\frac{E_1 y_1}{\rho} dA + \int_{A_2} -\frac{E_2 y_2}{\rho} dA = 0$$

$$-\frac{E_1}{\rho}\int y_1 dA - \frac{E_2}{\rho}\int y_2 dA = 0 \qquad (\int ydA = Q)$$

$E_1 Q_1 + E_2 Q_2 = 0$ $\rightarrow$ از حل این معادله، مکان محور خنثی جسم به دست می‌آید.

$$M = \int_{A_1} \sigma_1 y_1 dA + \int_{A_2} \sigma_2 y_2 dA = -\frac{E_1}{\rho}\int {y_1}^2 dA - \frac{E_2}{\rho}\int {y_2}^2 dA$$

$$M = -\frac{E_1}{\rho} I_1 - \frac{E_2}{\rho} I_2 \quad \rightarrow$$

I_1 : گشتاور دوم سطح اول نسبت به محور خنثی که در بالا مکان آن محاسبه شد.

روش مقطع معادل :

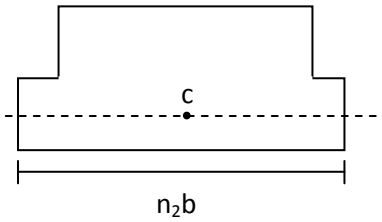
هرگاه مقطع تیر ما از چند جنس مختلف باشد، یکی از مقاطع را مبنا قرار می‌دهیم و طول بقیه را به نسبت E هایشان تغییر می‌دهیم. مقطع بدست آمده را مقطع معادل می‌گوییم. پس از آن کافیست محور خنثی و ممان اینرسی مقطع معادل را بدست آوریم.



$$E_1 Q_1 + E_2 Q_2 = 0 \quad \rightarrow \quad E_1 Q_1 + \frac{E_2}{E_1} E_1 Q_2 = 0\,, \qquad \frac{E_2}{E_1} = n_2$$

$$Q_1 + n_2 Q_2 = 0 \quad \rightarrow \quad Q_1' + Q_2' = 0 \quad \rightarrow \quad Q'' = 0$$

رابطه بالا نشان‌دهنده همان محور خنثی گذرنده از مرکز جرم مقطع جدید است.

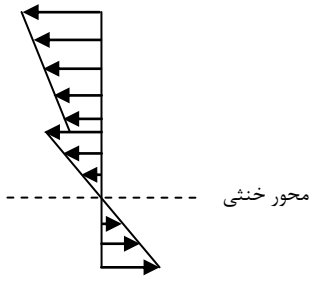


$$\frac{E_1}{E_1} = n_1 = 1\,, \qquad \frac{E_2}{E_1} = n_2\,, \qquad \frac{E_3}{E_1} = n_3\,, \quad \ldots$$

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{My}{I'} \\ \sigma_2 = n_2 \frac{My}{I'} \end{cases}$$

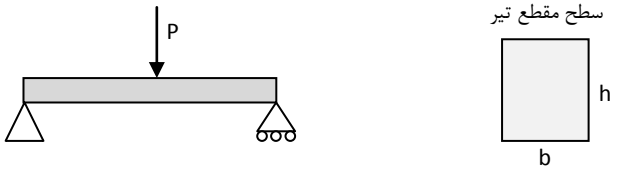
I' ممان اینرسی مقطع جدید است

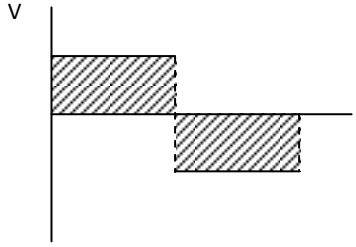
نحوه توزیع تنش در عضوهای چند ماده‌ای (در قسمت فصل مشترک برش ایجاد می‌شود) :

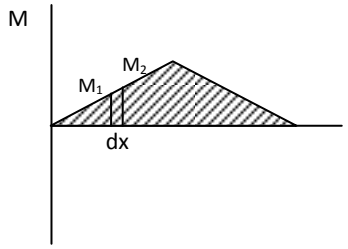


تنش‌های برشی در تیرها:

تیر زیر به سطح مقطع مستطیل را در نظر می‌گیریم که بار P بر آن وارد می‌شود:





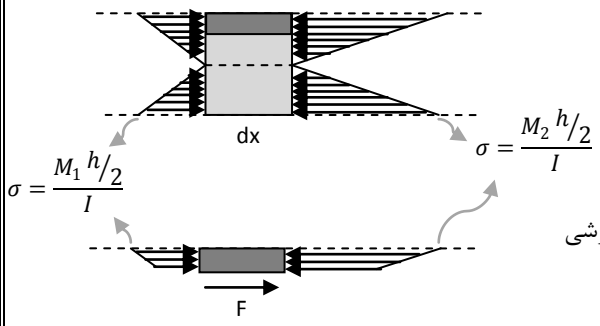


اگر طول کوچک dx را بررسی کنیم توزیع تنش‌ها به صورت زیر خواهد بود:

با توجه به نمودار خمش $M_1 \neq M_2$ و $M_2 > M_1$ است :

$$M_2 = M_1 + dM$$

اگر یک جزء از المان فوق را جدا کنیم دارای توزیع تنش به شکل زیر می‌شود :



چون کل جسم در تعادل است هر جزء از آن هم باید در تعادل باشد . نیروی برشی F به همین دلیل وجود دارد.

نیروی F از المان جداشده به سطح زیرین المان وارد می‌شود.

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad + \int_A \sigma_1 dA - \int_A \sigma_2 dA + F = 0$$

$$\rightarrow \int_A \frac{My}{I} dA - \int_A \frac{(M+dM)y}{I} dA + F = 0 \quad \rightarrow \quad F = \int_A \frac{dM\, y}{I} dA$$

Q : گشتاور اول سطح جداشده نسبت به محور خنثی :

$$F = \frac{dM}{I} \int y dA = \frac{dM}{I} Q$$