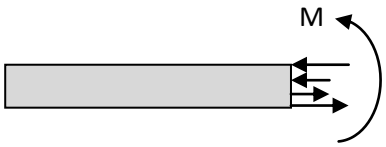
خمش

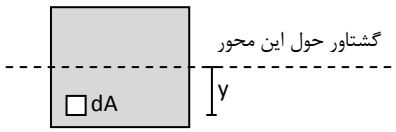
در تیر تحت خمش خالص تنش وجود دارد ولی برآیند این تنش‌ها روی سطح مقطع صفر است.



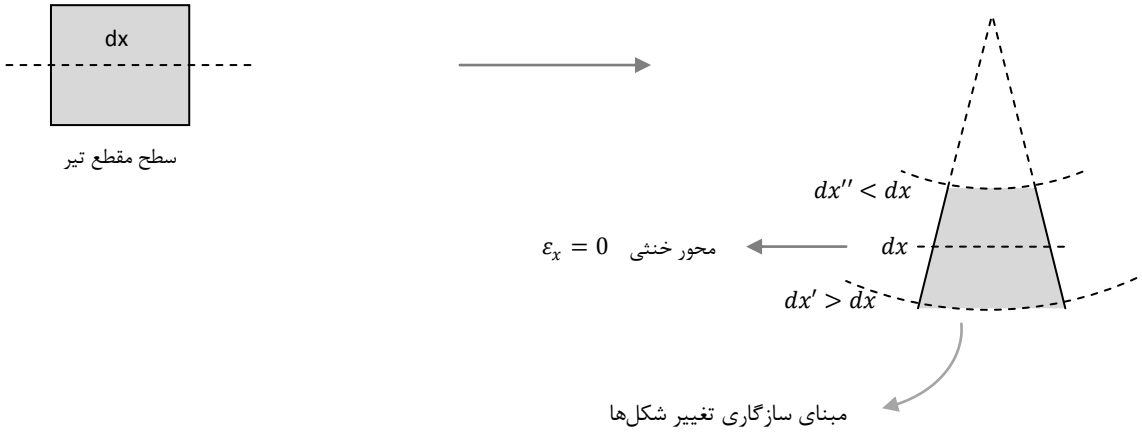
معادلات تعادل:

$$N = \int_A \sigma dA = 0$$

$$M = \int_A (\sigma dA) y$$



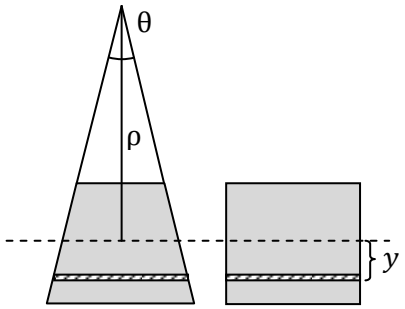
بر اثر خمش، تیر همواره شکل منحنی به خود می‌گیرد گه در dx طول خیلی کوچک می‌توان آن را قسمتی از دایره در نظر گرفت.



فرضیات:

۱) هر سطح مقطعی که مسطح بوده بعد از اعمال خمش مسطح باقی می‌ماند

۲) هر مقطعی که قبل از تغییر شکل بر محور تیر عمود بوده بعد از آن هم عمود باقی می‌ماند.



$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = -\frac{y}{\rho} \quad \rightarrow$$

میزان کرنش که در آن y فاصله تا محور خنثی و ρ شعاع خمیدگی است.

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -\frac{Ey}{\rho}$$

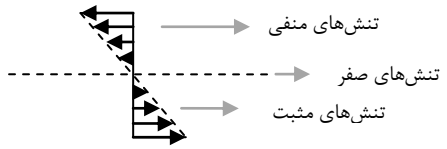
$$N = \int_A \sigma dA = \int_A -\frac{Ey}{\rho} dA = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{E}{\rho}\int ydA = 0$$

$\int ydA$ بیان‌گر گشتاور اول سطح است که وقتی صفر شود نشان می‌دهد محور از مرکز سطح گذشته است.

$$M = \int_A (\sigma dA)y = \int_A -\frac{E}{\rho}y^2 dA = -\frac{E}{\rho}\int y^2 dA \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M = -\frac{EI}{\rho}} \longrightarrow \sigma_x = -\frac{yM}{I}$$

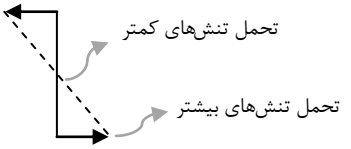
ممان اینرسی

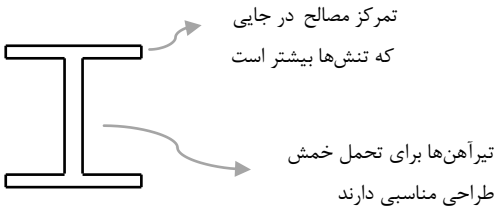
تنش در هر نقطه از سطح مقطع که به فاصله y از محور قرار دارد از این رابطه محاسبه می‌شود که با فاصله از محور رابطه خطی دارد.

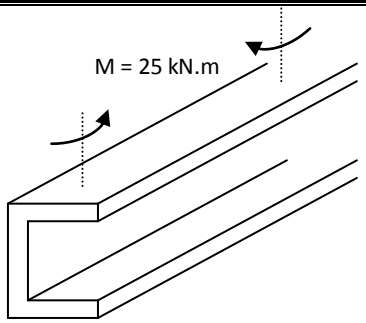


$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}\, C}{I} = \frac{M_{max}}{I/C} = \frac{M_{max}}{S}$$

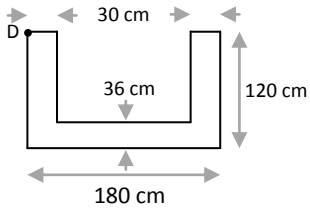
S : مدول خمشی مقطع







❖ ***مثال.*** *تنش نقطه* D *را در تیر مقابل بیابید.*



$$Ay_c = \int ydA$$

$$y_c = \frac{\left(180 \times 36 \times \frac{36}{2}\right) + 2\left(30 \times 84 \times \left[\frac{84}{2} + 36\right]\right)}{(180 \times 120) - (120 \times 84)} = 44.25\ mm \quad \rightarrow \quad \text{محل محور خنثی}$$

$$I = \underbrace{\frac{180 \times 36^3}{12} + 180 \times 36 \times (26.25)^2}_{\text{.....}} + 2\underbrace{\left[\frac{30 \times 84^3}{12} + 30 \times 84 \times 33.75^2\right]}_{\text{.....}}$$

$$I = 13869000\ mm^4$$

$$\sigma_D = \frac{25 \times 10^3 \times 10^3 \times 75.75}{13869000} = 136.5\ \frac{N}{mm^2} \quad \rightarrow \quad \sigma_D = 136.5\ MPa$$