برای بررسی رفتار هر ماده به نمودار آن نیاز داریم . ضریب زاویه ناحیه الاستیک را با E نمایش می‌دهیم و آن را **مدول الاستیسیته** می‌نامیم. E معرف جنس جسم است که رابطه‌ی بین نیرو و تغییر شکل را نشان می‌دهد. از آنجا که کرنش دیمانسیون ندارد، واحد E همان واحد تنش است.

❖ ***مثال***

$$\begin{cases} \boldsymbol{E = 2 \times 10^6 \frac{kg}{cm^2}} \\ \boldsymbol{P = 800\ kg} \\ \boldsymbol{l = 10\ cm} \\ \boldsymbol{A = 1\ cm^2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \Delta \boldsymbol{l} = ?$$

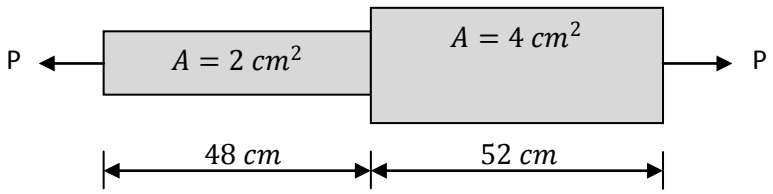


$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\frac{P}{A} = E\frac{\Delta l}{l} \quad \rightarrow \quad 800 = 2 \times 10^6 \times \frac{\Delta l}{10} \quad \rightarrow \quad \Delta l = 4 \times 10^{-3} cm$$

- **نکته** : قانون هوک $\sigma = E\varepsilon$ همواره و برای همه‌ی سطوح صادق است اما رابطه‌ی $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$ که از قانون هوک نتیجه می‌شود و حالت ماکروسکوپی آن است برای طولی از l که در آن N و A ثابت است کاربرد دارد.

❖ ***مثال.*** *اگر* $E = 200\ Gpa$ *و* $P = 20 \times 10^3 N$ *تغییر طول کل میله را محاسبه کنید. همچنین تعیین کنید در کدام ناحیه تنش ماکسیمم است.*

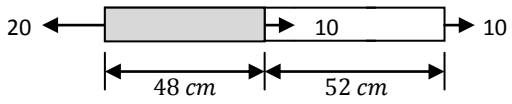


$$\Delta l_1 = \frac{Nl}{EA} = \frac{20 \times 10^3 \times 48 \times 10^{-2}}{200 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-4}} \quad , \quad \Delta l_2 = \frac{Nl}{EA} = \frac{20 \times 10^3 \times 52 \times 10^{-2}}{200 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-4}}$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 37 \times 10^{-5}\ m$$

$\uparrow \sigma = \frac{P}{A} \downarrow$ ← در میله نازک تنش بیشتر است

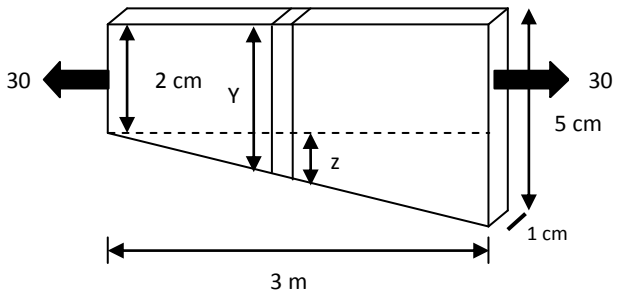
❖ ***مثال.*** *تعیین کنید در کدام ناحیه تنش ماکسیمم است.*



$N - 20 = 0 \quad \rightarrow \quad N = 20 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{max}$

$N - 20 + 10 = 0 \quad \rightarrow \quad N = 10$

❖ ***مثال.*** *تغییر طول قطعه ناشی از تنش وارده را محاسبه کنید.*



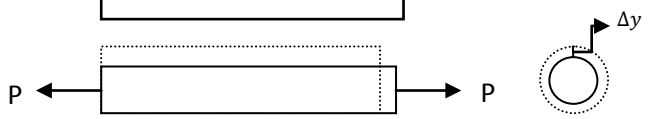
$$\begin{cases} A = 1 \times y \\ y = 2 + z \end{cases} \quad \rightarrow \quad A = 2 + z$$

$\frac{z}{3} = \frac{x}{300} \quad \rightarrow \quad z = \frac{x}{100}$ تشابه مثلثاتی

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad \rightarrow \quad \Delta l = \int_0^3 \frac{30dx}{E \times A} = \int_0^3 \frac{30dx}{E(2+Z)} = \int_0^3 \frac{30dx}{E\left(2+\frac{x}{100}\right)} = \frac{3\times10^3 ln\frac{203}{200}}{E}$$

- **تأثیر بارگذاری محوری بر تغییر طول ابعاد جسم :** اگر بار گذاری در راستای محور x باشد و کرنش ε_x را ایجاد کند تمام ابعاد عمود بر راستای x جسم مانند y و z با رابطه‌ی زیر دچار کرنش می شوند. ϑ ضریب پواسون برای هر ماده با آزمایش به دست می‌آید.

$$\varepsilon_z = \varepsilon_y = -\vartheta\varepsilon_x$$



- **تأثیر حرارت بر تغییر طول :** حرارت عامل دیگری است که سبب تغییر شکل جسم می‌شود اما بر خلاف نیرو حرارت در همه ابعاد و به یک نسبت باعث افزایش طول می‌شود.

$$\delta_T = \alpha l \Delta T$$

در رابطه‌ی بالا ε_T کرنش حرارتی، α ضریب ثابت حرارتی که برای هر ماده با آزمایش به دست می‌آید و ΔT تغییر درجه حرارت است.

- **اصل جمع آثار (Superposition) :** اگر چند عامل بر جسمی اثری با ماهیت یکسان داشته باشند – مثلاً همه موجب تغییر طول جسم شوند – می‌توان جداگانه اثر هر یک از عوامل را محاسبه کرد و سپس آنها را با هم جمع نمود.
بنابراین هنگامی که عامل نیرو و حرارت را با هم داریم اثر هر یک ر ا جداگانه محاسبه می کنیم، سپس مجموع را محاسبه می‌کنیم.

- **نکته :** برای سادگی بیشتر در تمام طول مسئله با طول اولیه کار می‌کنیم. بنابراین اگر ابتدا کرنش حرارتی را محاسبه کردیم، برای محاسبه‌ی کرنش ناشی از نیرو از تغییر طول حرارتی صرف نظر می‌کنیم.

برای حل هر مسئله:

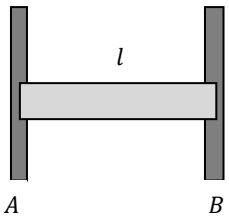
۱) مرزها را مشخص می‌کنیم

۲) تمامی اتصالات خارج از مرزها را جدا می کنیم و به جای آنها نیروهای وارد از سوی آنها را جاگذاری می‌کنیم

۳) نیروهای خارجی معلوم (بارها) را اعمال می‌کنیم

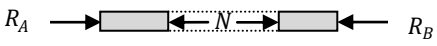
۴) معادلات تعادل را می‌نویسیم.
الف) اگر دستگاه معین بود آن را حل می‌کنیم
ب) اگر دستگاه نامعین بود به تعداد درجات نا معینی (تعداد معادلات مورد نیاز) از روی هندسه مسئله معادلات مورد نیاز را به دست می آوریم. (براساس اصل **سازگاری** یا **compatibility** همواره معادلات مورد نیاز از طریق هندسی بدست خواهد آمد)

❖ ***مثال.*** *در شکل زیر میله بین دو تکیه‌گاه گیردار قرار دارد. دمای محیط را افزایش می‌دهیم. تنش ایجاد شده در میله را محاسبه کنید. فرض کنید میله خم نمی‌شود و تکیه‌گاه‌ها صلب هستند.* $(\vartheta, \alpha, E, A)$



$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_A - R_B = 0$$

$$R_A = R_B = N$$

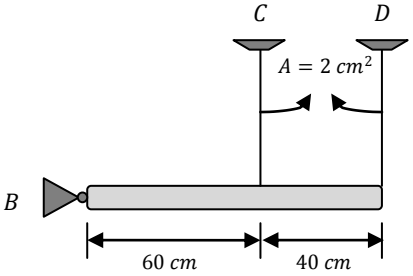


برای حل مسئله به یک معادله دیگر نیاز داریم اما از روابط تعادل معادله دیگری بدست نمی‌آید. بنابراین از هندسه مسئله استفاده می‌کنیم.

$$\Delta l = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{Nl}{EA} + \alpha l \Delta T = 0 \quad \rightarrow \quad R_A = R_B = EA\alpha\Delta T$$

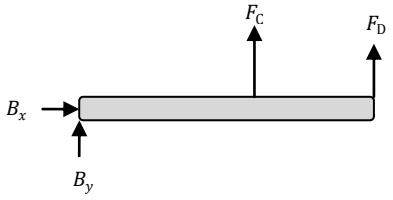
$$\sigma = \frac{N}{A} = E\alpha\Delta T$$

❖ ***مثال.*** *در مسئله شکل زیر میله افقی را صلب فرض کنید . دمای محیط را افزایش می‌دهیم. تغییر قطر میله‌های عمودی را محاسبه کنید.*



$$\begin{cases} E = 200\ Gpa \\ \alpha = 11 \times 10^{-6}\ {}^{1}/_{\circ C} \\ \vartheta = 0.3 \\ \Delta T = 80^{\circ C} \end{cases}$$

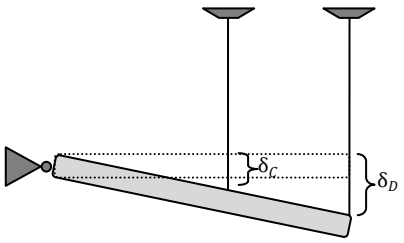
می‌دانیم که میله‌ها تحت حرارت دچار افزایش قطر می‌شوند. اما برای بدست آوردن جواب نهایی باید احتمال وجود نیروهایی را نیز که سبب کرنش می‌شوند بررسی کنیم.



$$\sum M_B = 0 \quad \rightarrow \quad F_C \times 60 + F_D \times 100 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad B_y + F_D + F_C = 0$$

دستگاه بالا یک درجه نامعینی دارد پس با تکیه بر اصل سازگاری(از طریق هندسی) یک رابطه دیگر پیدا می‌کنیم. طبق تشابه داریم :



$$\delta_D = \frac{5}{3}\delta_C$$

$$\frac{F_D l}{EA} + \alpha l \Delta T = \frac{5}{3}\left[\frac{F_C l}{EA} + \alpha l \Delta T\right]$$

$$\begin{cases} F_C = -6.18\ kN \\ F_D = +10.3\ kN \end{cases}$$