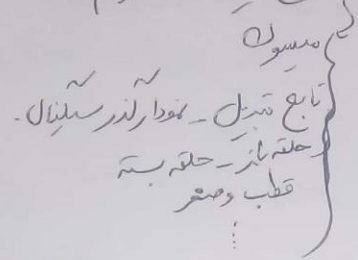


تحلیل سیستم های خطی دینامیکی بر اساس متغیرهای حالت

در طراحی و تحلیل سیستم های کنترل خطی، روش متغیرهای حالت نسبت به روش تابع تبدیل، روش نوینتری به حساب می آید.

این روش برای تمام سیستم های خطی، غیر خطی، متغیر پارامتر و نامتغیر پارامتر، سیستم های تک متغیره و چند متغیره به کار می رود.

روش تابع تبدیل به سیستم های نامتغیر پارامتر خطی



در یک سیستم، متغیرهای خروجی، راه ارتباطی بین سیستم و دنیای خارج هستند.

به طریقی فیزیکی قابل اندازه گیری یا ردیابی هستند.

مثلاً: در یک موتور الکتریکی، متغیرهای حالتی مانند جریان سیم پیچ و سرعت رابی توان به طریقی اندازه گیری کرد.

این متغیرهای خروجی هستند.

اما در همین موتور الکتریکی، شار الکتریکی رابی توان جزء متغیرهای حالت به شمار می آید اما نمی توان آنرا اندازه گرفت. بنابراین شار جزء متغیرهای خروجی سیستم نیست.

در دستگاه با n معادله حالت و q معادله خروجی و با هم دیگر معادله های دینامیکی رابی می سازند.

برای سادگی، معادله های دینامیکی را به صورت ماتریس برداری نشان می دهیم.

$$\dot{X}(t) = A X(t) + B U(t) \quad \text{که } X(t) \text{ بردار حالت، } U(t) \text{ بردار ورودی، } Y(t) = C X(t) + D U(t) \text{ بردار خروجی، } C(t) \text{ بردار خروجی، } D(t) \text{ بردار اغتشاش}$$

معادلات حالت:
$$\frac{dX(t)}{dt} = f[X(t), U(t), t]; \quad C(t) = g[X(t), U(t), t]$$

7

حال، در سیستم های خطی ناهمبند با زمان، معادلات دینامیکی این گونه نوشته می شود.

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Br(t) + Fw(t)$$

$$C(t) = Dx(t) + Er(t) + Hw(t)$$

ماتریس گذار حالت: ماتریسی است که در معادله حالت ممکن خطی زیر صریح کند.

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$$

اگر $\Phi(t)$ ماتریس $n \times n$ و نشانگر ماتریس گذار حالت باشد، در این صورت در معادله زیر صریح می کند.

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A\Phi(t)$$

حال اگر $x(0)$ حالت اولیه در $t=0$ باشد، در این صورت $\Phi(t)$ با معادله ماتریس زیر تعریف می شود:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) \quad t \geq 0$$

که $\Phi(t)$ جواب معادله آهنگی است.

$$sX(s) - x(0), AX(s) \rightarrow X(s) \quad (sI - A)X(s) = x(0)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0)$$

البته با فرض اینکه $sI - A$ معکوس باشد یعنی $\det(sI - A) \neq 0$ باشد.

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1} x(0)] \quad t \geq 0$$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

راه دیگر برای حل معادله آهنگی $\dot{x}(t) = Ax(t)$ و $x(0)$ روشی است که سبک معادله را نیز انطباق است.

فرض کنید: e^{At} را به این صورت در نظر بگیریم. e^{At} می توانی ماتریس Ax به صورت زیر

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots$$

$$\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At} \rightarrow \Phi(t) = e^{At}$$

✓

مفهوم ماتریس گذار حالت: $\Phi(t)$

چون ماتریس گذار حالت در معادله حالت هم دیده می‌کند، نشان دهنده پاسخ آزاد سیستم است.

به عبارت دیگر، ماتریس گذار حالت، همان پاسخ سیستم است وقتی که تحریک تغییر شرایط اولیه باشد.

ماتریس گذار حالت نیز به ماتریس A بستگی دارد. بنابراین، ماتریس گذار حالت A منحصر به فرد است.

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \}$$

خواص ماتریس گذار حالت:

$$\Phi(0) = I \quad \left\{ \begin{array}{l} t=0 \rightarrow \Phi(0) = I \\ \Phi(t) = e^{At} \end{array} \right.$$

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$$

$$\Phi(t) e^{-At} = e^{At} e^{-At} = I$$

مثال) معادله حالت زیر را رسم:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

حال اگر ورودی برابر با $r(t) = 1$ باشد، یعنی $u(t) = r(t)$ باشد، بردار حالت $x(t)$ را بیابید.

حل: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $F = 0$
ابتدا ماتریس $(sI - A)$ را تشکیل می‌دهیم.

$$\dot{X} = AX + BU \rightarrow X(s) - X(0) = sX - X(0) = AX + BU$$

$$(sI - A)X = X(0) + BU \rightarrow$$

$$sX - AX = X(0) + BU \rightarrow X = (sI - A)^{-1} [X(0) + BU]$$

حال بافتن $(sI - A)^{-1}$ به صورت $(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$

$\Delta \quad (sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \rightarrow$ مت:
 هم تکرار ماتریس گذار حالت را

$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}((sI - A)^{-1}) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$

$X(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} \right] =$

$= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \frac{1}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 1 \end{bmatrix} \right]$

$X(t) = \begin{bmatrix} 0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t} \\ -t - e^{-t} + e^{-2t} \end{bmatrix} \quad t \geq 0$

$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left(2e^{-t} - e^{-2t} \right)$

$A \Big|_{s=-1} = \frac{2}{1}, 2 \quad B \Big|_{s=-2} = \frac{1}{-1} = -1$

تبدیل به صورت متغیر فازی:

$\dot{X} = AX + BU$ همگام ماتریس های ضرایب A و B به صورت زیر باشند، معادله حالت

را صورت متغیر فازی می نامیم. بعداً خواهیم دید که یک سیستم نادرعبارت از یک خطی که قابل ناسی
 به صورت متغیر فازی باشد، به لحاظ کنش نیز یک و طایفه تقسیم قطب از طریق سیگنور حالت

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & \dots & -a_n \end{bmatrix}_{n \times n}$

خواص یک تبه معینی دارد.

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$

توضیح: در یک سیستم نامتغیر با زمان خطی که معادله حالت آن به صورت $\dot{X} = AX + Bu$ تعریف می شود، اگر ماتریس S نامکین باشد، می توان معادله حالت این سیستم را به صورت متغیر با زمان درآورد.

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

ماتریس X یک بردار حالت $n \times 1$ است. A ماتریس $n \times n$ و B ماتریس $n \times 1$

u ورودی اسکالر است. بنابراین، اگر S نامکین باشد، یک ماتریس تبدیل کننده Q مانند زیر وجود دارد:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_1 A \\ \vdots \\ Q_1 A^{n-1} \end{bmatrix}; \quad Q_1 = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]^{-1}$$

$$A_1 = Q A Q^{-1}$$

$$B_1 = Q B$$

مثال) اگر یک سیستم نامتغیر با زمان خطی به صورت زیر داشته باشیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مطلوب است تبدیل معادله حالت به صورت متغیر با زمان.

حل: $S = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(S) = -1 \times 1 - 1 \times 0 = -1$
 نامکین است. پس قسم متفاوت متغیر با زمان وجود دارد.

$$Q_1 = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = [1 \quad -1] \quad Q_1 A = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det(Q)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B_1 = Q B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پارامتر هست که معادله مسطحه شکل اصفه قراران خروج تابع تبدیل سیستم پویا می آید.

برای بدست آوردن معادله مسطحه از راه متغیرهای حالت:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU + FW \\ C = DX + EU + HW \end{cases} \Rightarrow \cancel{SX - X(0)} = AX + BU + FW$$

درایع تبدیل، شرط اولیه
صورت شود.

$$X(s) = (sI - A)^{-1} (Bu + Fw)$$

$$C = D[(sI - A)^{-1}(Bu + Fw)] + Eu + Hw$$

$$G_r(s) = D(sI - A)^{-1}B + E$$

$$G_w(s) = D(sI - A)^{-1}F + H$$

نتیجه: $C(s) = G_r(s)u(s) + G_w(s)w(s)$

$$G_r(s) = D \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|} B + E$$

↓

حال اگر خروجی تابع تبدیل را برابر صفر قرار دهیم، معادله مسطحه حاصل می شود:

$$\downarrow$$

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_2s + a_1 = 0 \rightarrow \text{مقدار معادله مسطحه}$$

غالباً ریشه های معادله مسطحه را ویژه مقادیرهای ماتریس A می نامیم.

* معادله ویژه، طی یک محل تبدیل ناکلین مانند تبدیل به فرم مقادیر متغیر فازی، تغییر نمی کند.