

تعریف صفر و قطب :

نقاطی از صفحه مختلط s که در آن نقاط تابع تبدیل $G(s)$ تحلیل باشد، نقاطی که در آن تابع تبدیل $G(s)$ تحلیل باشد، نقاط تکین (Singular points) گوئیم.

نقاطی که در آن تابع تبدیل $G(s)$ یا مشتقات آن به سمت بی نهایت میل کند، $\leftarrow$ قطب (p) (Pole)

و نقاطی که تابع تبدیل $G(s)$ مقدار صفر را اختیار کند، صفر گوئیم. (z) (Zero)

$$G(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

مرتبه قطب : برای تعیین مرتبه قطب $G(s)$ در $(s-p_0)$ ، n را حساب می کنیم.
 $s \rightarrow p_0$
 $n = 1, 2, \dots$

مقدار n که به ازای آن برای اولین بار مقدار حد بالا متناهی شود، مرتبه قطب است.

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s+5)^2} \rightarrow \text{مرتبه قطب } s = -5 \text{ چند است؟}$$

$$\lim_{s \rightarrow -5} (s+5)^n \times G(s) = \text{به ازای } n=2 \text{ متناهی است.} \rightarrow \text{پس مرتبه قطب } -5 \text{ برابر } 2 \text{ است.}$$

در تابع $p(s) = \frac{\sin s}{s^2}$ مرتبه قطب $s=0$ چقدر است؟

$$\lim_{s \rightarrow 0} (s-0)^n \times \frac{\sin s}{s^2} = \frac{s^n \times s}{s^2} = 1 \rightarrow$$

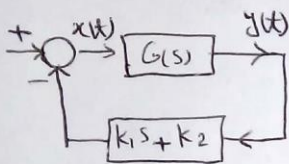
 یعنی مرتبه قطب $s=0$ برابر با 1 است.
 $n=1$

(*) قطب های مرتبه اول را قطب ساده نرسم.

لغور (۶۹) معادله دینامیکی یک سیستم مدار باز $G(s)$ به صورت زیر است:

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = x(t)$$

حال ضرایب K_1 و K_2 را به گونه ای طراحی کنید تا قطب های تابع تبدیل مدار بسته در نقاط $s_1 = -1$ و $s_2 = -3$ قرار گیرند.



$K_1 = 7, K_2 = 1$
 $K_1 = 5, K_2 = 3$
 $K_1 = 16, K_2 = 5$
 $K_1 = 13, K_2 = 3$

(۱) هدف از این که معادله دفرانسیل داده شده در سوال مربوط به کل سیستم نیست و صرفاً مربوط به بلوک $G(s)$ است. بنابراین رابطه به شایسته فیدبک ندارد.
 طبق شکل سوال سیستم مدار باز

(۲) نکته دوم: $x(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی بلوک $G(s)$ است. بنابراین با استفاده از تبدیل لاپلاس، نسبت خروجی به ورودی را برای $G(s)$ بدای کنیم. یعنی از طرفین معادله دفرانسیل، لاپلاس بگیریم:

$$y(t) - 3y'(t) + 2y(t) = x(t) \xrightarrow{\text{Laplace}} s^2 Y - 3sY + 2Y = X$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 - 3s + 2}$$

تابع این، طبق مسوول، می توانه تابع تبدیل کل سیستم را پیدا کرد:

$$T(s) = \frac{1}{s^2 - 3s + 2} = \frac{1}{s^2 - 3s + 2 + k_1s + k_2} = \frac{1}{s^2 - 3s + 2}$$

$$= \frac{1}{s^2 + s(k_1 - 3) + (k_2 + 2)} \rightarrow \text{حال، طبق صورت سوال، قطب ها باید برابر با ۱- و ۳- باشند}$$

یعنی ضریب پایه (۱+)(۳+) شود.

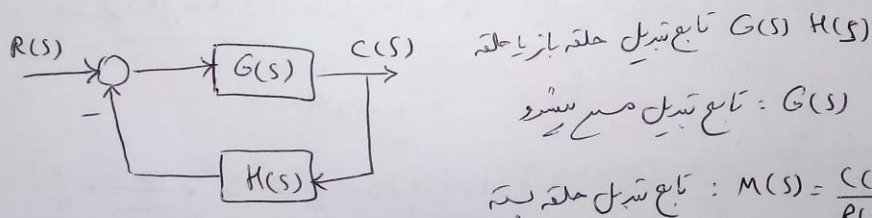
$$s^2 + (k_1 - 3)s + (k_2 + 2) = (s + 1)(s + 3) = s^2 + 4s + 3$$

$$\begin{cases} k_1 - 3 = 4 \rightarrow k_1 = 7 \\ k_2 + 2 = 3 \rightarrow k_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \text{گزینه یک صحیح است.}$$

تعریف: معادله مشغله، معادله مشغله یک سیستم خطی، معادله ای است که از صورت قرار دادن

خارج تابع تبدیل سیستم، بدست می آید.

(*) ریشه های معادله مشغله سیستم بیارصم است.



$G(s)$ و $H(s)$ تابع تبدیل حلقه باز حلقه

$G(s)$: تابع تبدیل مسیح مسیح

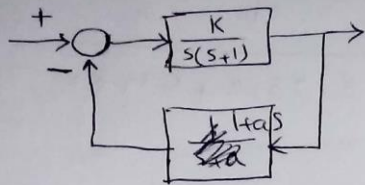
$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$: تابع تبدیل حلقه بسته

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

تابع تبدیل حلقه باز

$$s = -1 \pm j\sqrt{3}$$

در سیستم کنترل در مدار k و a اینها را بیابید که قطب های سیستم حلقه بسته در محل $\frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$ قرار گیرد.



$$\begin{aligned} \square a &= 3/4 & k &= 4 & \square a &= 1/4 & k &= 4 \\ \square a &= 4 & k &= 3/4 & \square a &= 4 & k &= 1/4 \end{aligned}$$

حل) ابتدا تابع تبدیل سیستم حلقه بسته را بیابیم.

$$M(s) = \frac{\frac{K}{s(s+1)}}{1 + \frac{K(1+as)}{s(s+1)}}$$

$$= \frac{Ks/a}{\frac{s(s+1)(s+a) + K}{s[s^2 + (a+1)s + a] + K}}$$

معادله مشخصه سیستم

$$M(s) = \frac{K}{s(s+1) + K(1+as)}$$

معادله مشخصه سیستم: $s(s+1) + K(1+as) = 0 \rightarrow$ ساده می کنیم:

$$s^2 + s + Kas + K = 0 \rightarrow s^2 + s(1+Ka) + K = 0$$

معادله مشخصه سیستم را به صورت $(s+1+j\sqrt{3})(s+1-j\sqrt{3}) = 0$ می توان نوشت.

$$s^2 + 2s + 4 = 0$$

معادله مشخصه سیستم را به صورت $s^2 + (1+Ka)s + K = s^2 + 2s + 4$ می توان نوشت.

$$\left. \begin{aligned} 1+Ka &= 2 \\ K &= 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} 1+4as &= 2 \\ K &= 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} a &= 1/4 \\ K &= 4 \end{aligned} \right\}$$

تحلیل سیستم های خطی دینامیکی بر اساس متغیرهای حالت

در طراحی و تحلیل سیستم های کنترل خطی، روش متغیرهای حالت نسبت به روش تابع تبدیل، روش نوینتری به حساب می آید.

این روش برای تمام سیستم های خطی، غیر خطی، متغیر بازمان و نامتغیر بازمان، سیستم های تک متغیر و چند متغیر به کار می رود.

روش تابع تبدیل به سیستم های نامتغیر بازمان خطی
 هم میسر است
 تابع تبدیل - تعداد ورودی و خروجی
 حلقه باز - حلقه بسته
 قطب و صفر

در یک سیستم، متغیرهای خروجی، راه ارتباطی بین سیستم و دنیای خارج هستند.
 به طریقی فیزیکی قابل اندازه گیری یا دسترسی هستند.

مثلاً: در یک موتور الکتریکی، متغیرهای حالتی مانند جریان سیم پیچ و سرعت رابی توان به طریقی اندازه گیری می گردند.
 اینها متغیر خروجی هستند.

اماد رحیم موتور الکتریکی، شار الکتریکی رابی توان جزء متغیرهای حالت برشمر اما نمی توان آنها را اندازه گرفت. شار را می توان جزء متغیرهای خروجی سیستم نسبت داد.

در نگاه با n معادله حالت و q معادله خروجی و با جمع دیگر معادله های دینامیکی رابی می سازند.

برای سادگی، معادله های دینامیکی را به صورت ماتریسی برداری نشان می دهیم.
 $\dot{X}(t) = A X(t) + B U(t)$ بردار حالت که به ماتریس بستنی است - $r(t)$ بردار ورودی $C(t)$ بردار خروجی
 $w(t)$ بردار اغتشاش

$$\frac{dX(t)}{dt} = f[X(t), r(t), w(t)]; C(t) = g[X(t), r(t), w(t)]$$

معادلات حالت

7

حال، در سیستم های خطی ناممتغیر با زمان، معادلات دینامیکی اینگونه نوشته می شود:

$$\frac{dx(t)}{dt} = AX(t) + Br(t) + Fw(t)$$

$$C(t) = DX(t) + Er(t) + Hw(t)$$

ماتریس گذار حالت: ماتریسی است که در معادله حالت خطی زیر صدق کند.

$$\frac{dx(t)}{dt} = AX(t)$$

اگر $\Phi(t)$ ماتریس $n \times n$ و نشانگر ماتریس گذار حالت باشد، در این صورت در معادله زیر صدق میکند.

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A\Phi(t)$$

حال اگر $X(0)$ حالت اولیه در $t=0$ باشد، در این صورت $\Phi(t)$ با معادله ماتریس زیر تعریف می شود:

$$X(t) = \Phi(t) X(0) \quad t \geq 0 \rightarrow$$

که $\Phi(t)$ جواب معادله آهنگی است.

$$sX(s) - X(0), AX(s) \rightarrow X(s) \{sI - A\} = X(0)$$

$$X(s), (sI - A)^{-1} X(0)$$

البته با فرض اینکه $sI - A$ معکوس باشد یعنی $\det(sI - A) \neq 0$

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1} X(0)] \quad t \geq 0$$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1} X(0)]$$

راه دیگر برای حل معادله آهنگی $\dot{X}(t) = AX(t)$ روشی است که سبب معادله زیر را منجر است

فرض کنید: $X(t) = e^{At} X(0)$ باشد. در این صورت e^{At} سری توانی ماتریس A به صورت زیر است:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots$$

$$\frac{d e^{At}}{dt} = A e^{At} \rightarrow \Phi(t) = e^{At}$$