

یادآور: معادله دینفرانسیل زیر را در نظر بگیرید. در این معادله، $u(t)$ تابع پله است. شرایط اولیه عبارتند از: $x(0) = -1$ و $x'(0) = 2$ (یا استغاده از تبدیل لابلاس)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 2x = 5u(t)$$

حالت این معادله دینفرانسیل را حل کنید. ابتدا از طرفین معادله، لابلاس بگیرید:

$$s^2 X - sX(0) - X'(0) + 3sX - 3X(0) + 2X = \frac{5}{s}$$

$$\begin{aligned} \downarrow \\ \left\{ \frac{d^2 x}{dt^2} \right\} &= s^2 X - sX(0) - X'(0) \\ \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} &= sX - X(0) \\ \left\{ x \right\} &= X(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^2 X - s(-1) - 2 + 3sX - 3(-1) + 2X &= \frac{5}{s} \\ s^2 X + s - 2 + 3sX + 3 + 2X &= \frac{5}{s} \\ s^2 X + s(3X) + 2X &= -s + 2 - 3 + \frac{5}{s} \\ \rightarrow X &= \frac{-s^2 - s + 5}{(s^2 + 3s + 2)s} \\ &= \frac{-s^2 - s + 5}{(s+2)(s+1)s} \end{aligned}$$

حال برای بدست آوردن $x(t)$ ، عکس تبدیل لابلاس بگیرید:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ X(s) \}$$

↓

پست قسمت راست، باید تجزیه شود.

$$X = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} = \frac{-s^2 - s + 5}{(s+1)(s+2)s}$$

$$A \Big|_{s=0} = \frac{5}{(0+1)(0+2)} = \frac{5}{2}$$

$$B \Big|_{s=-1} = \frac{-1+1+5}{(-1+2)(-1)} = B = -5$$

$$C \Big|_{s=-2} = \frac{-4+2+5}{(-2+1)(-2)} = \frac{3}{2}$$

$$X = \frac{5/2}{s} - \frac{5}{s+1} + \frac{3/2}{s+2}$$

عکس تبدیل لابلاس

$$x(t) = \frac{5}{2} u(t) - 5e^{-t} + \frac{3}{2} e^{-2t} \quad t \geq 0$$

یافتن ایمپالس و تابع تبدیل سیستم های خطی

LTI

یک سیستم نامتغیر با زمان خطی با ورودی $r(t)$ و خروجی $c(t)$ را در نظر بگیرید. این سیستم را می توان با یافتن ایمپالس $g(t)$ توصیف کرد. این یافتن خروجی سیستم است وقتی که ورودی آن تابع ایمپالس واحد $\delta(t)$ باشد.

وقتی که یافتن ایمپالس سیستم خطی معلوم باشد، خروجی سیستم $c(t)$ را به ازای هر ورودی $r(t)$ می توان به کمک تابع تبدیل بدست آورد.

↓
تابع تبدیل سیستم یک ورودی-یک خروجی عبارت است از "تایید تبدیل لاپلاس یافتن ایمپالس وقتی که $\delta(t)$ شرایط اولیه صفر باشد".

$G(s) =$ تابع تبدیل یک سیستم یک ورودی-یک خروجی با ورودی $r(t)$ و خروجی $c(t)$

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

* یادمان باشد که معمولاً رابطه بین ورودی و خروجی سیستم های نامتغیر با زمان خطی با ورودی داره - پیوسته معمولاً با یک معادله دیفرانسیل معین می شود.

پس بهتر و راحت تر است که تابع تبدیل را از معادله دیفرانسیل

بدست آوریم.

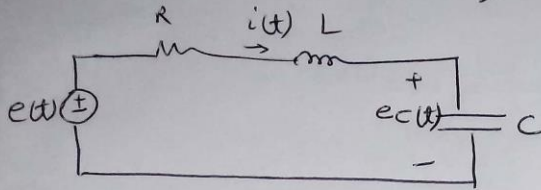
شرایط اولیه صفر

بنابراین: فرض کنید شرایط اولیه صفر هستند. حال از معادله دیفرانسیل

تبدیل لاپلاس بگیریم.

↓
حال نسبت به تبدیل لاپلاس خروجی به ورودی را بیابیم.

مثال) مدار RLC سری را در نظر بگیرید. تابع تبدیل / نسبت خروجی $i(t)$ به ورودی $e(t)$ چیست را بیابید.



حل: KVL: $-e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e_c(t) = 0$

جریان عبوری از خازن متناسب با تغییرات ولتاژ دو سر آن است.
 $i(t) = C \frac{de_c(t)}{dt}$ داریم

مشتق می‌گیریم: $-\frac{de(t)}{dt} + R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{de_c}{dt} = 0$
 خازن می‌کنیم

$-\frac{de(t)}{dt} + R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0 \rightarrow$ یعنی همه یاراسترها غیر از آنچه که صحت سوال خواسته (i و e) را حذف کنیم.
 لاپلاس می‌گیریم

$-sE + RSI + LS^2 I + \frac{I}{C} = 0 \rightarrow (RS + LS^2 + \frac{1}{C}) I = sE$

$\frac{I}{E} = \frac{s}{LS^2 + RS + \frac{1}{C}} = \frac{\frac{1}{L} s^{-1}}{\frac{1}{C} s^{-1} + s + \frac{R}{L}}$