

# فصل هفتم

## تبدیل $Z$

## مقدمه

در فصل قبلی، تبدیل لاپلاس را بعنوان تعمیمی منطقی از تبدیل فوریه پیوسته زمانی بررسی کردیم. این تعمیم باعث شد که تبدیل لاپلاس در دامنه وسیع تری از سیگنال‌ها، قابل کاربرد باشد (نسبت به تبدیل فوریه). چون بسیاری از سیگنال‌هایی که تبدیل فوریه ندارند تبدیل لاپلاس دارند. در این فصل تبدیل Z که معادل گسسته زمانی تبدیل لاپلاس و تعمیمی از تبدیل فوریه گسسته زمانی است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همانگونه که خواهیم دید بسیاری خواص تبدیل Z مشابه خواص تبدیل لاپلاس خواهد بود. اما همانگونه که خواهیم دید علاوه بر تشابهات فراوان میان تبدیل لاپلاس و تبدیل Z، تفاوت‌های عمده‌ای نیز بین این دو وجود دارد. که ناشی از ماهیت کاملاً متفاوت این دو نوع تبدیل می‌باشد. البته پیش‌بینی این تفاوت‌ها با توجه به اینکه تبدیل Z یک عملگر گسسته زمان و تبدیل لاپلاس یک عملگر پیوسته زمان است کاملاً امکان پذیر می‌باشد.

## ۷-۱ تعریف تبدیل Z

همانگونه که در فصل چهارم دیدیم، برای سیستم LTI گسسته زمانی با پاسخ ضربه  $h[n]$ ، پاسخ سیستم به ورودی نمایی مختلط  $x[n] = z^n$  چنین است.

$$y[n] = H(z)z^n \quad (۱-۷)$$

که در آن

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n} \quad (۲-۷)$$

اگر  $z = e^{j\Omega}$  باشد (یا  $|z| = 1$ ) و اگر  $\Omega$  نیز حقیقی باشد، مجموع (۲-۷) متناظر با تبدیل فوریه گسسته زمانی  $h[n]$  خواهد بود. اما در حالت کلی اگر  $|z|$  معین نباشد، مجموع (۲-۷)، تبدیل Z دنباله  $h[n]$  است. پس تبدیل Z دنباله  $x[n]$  بدینصورت تعریف می‌شود.

$$X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \quad (۳-۷)$$

و این تناظر بطور مختصر با علامت زیر نمایش داده می‌شود.

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad (۴-۷)$$

همانگونه که تبدیل لاپلاس نقش مهمی در تحلیل سیستم‌های پیوسته زمان دارد تبدیل Z نیز ابزاری کارآمد در تجزیه و تحلیل سیستم‌های گسسته زمان بشمار می‌رود. در رابطه (۳-۷) چون Z یک عدد مختلط است می‌توان آنرا بصورت زیر نوشت.

$$z = re^{j\Omega} \quad (۵-۷)$$

با قرار دادن (۵-۷) در (۳-۷) داریم.

$$X(re^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\Omega})^{-n}$$

یا بطور معادل

$$X(re^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{x[n]r^{-n}\}e^{-j\Omega n} \quad (6-7)$$

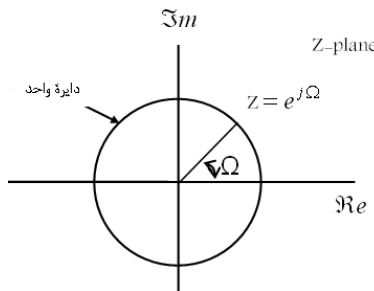
پس  $X(re^{j\Omega})$  تبدیل فوریه گسسته زمان  $x[n]r^{-n}$  است. یعنی

$$X(re^{j\Omega}) = F\{x[n]r^{-n}\} \quad (7-7)$$

جمله  $r^{-n}$  بسته به مقدار  $r$  ممکن است نسبت به  $n$  افزایشی یا میرا باشد. اگر  $r$  بزرگتر از واحد باشد، افزایشی و اگر کوچکتر از واحد باشد میرا است. از طرف دیگر می توان گفت تبدیل  $Z$  بازاء  $|z|=1$  همان تبدیل فوریه خواهد بود، یعنی

$$X(|z|=1) = F\{x[n]\} \quad (8-7)$$

همانطور که قبلاً گفتیم، تبدیل لاپلاس وقتی که مقدار حقیقی "s" صفر باشد به تبدیل فوریه تبدیل می شود. بعبارت دیگر تبدیل لاپلاس روی محور موهومی مساوی تبدیل فوریه است. بطریق مشابه می توان گفت تبدیل  $Z$  وقتی که  $|z|=1$  است به تبدیل فوریه گسسته زمانی تبدیل می شود. بنابراین تبدیل  $Z$  روی دایره واحد (ر.ک.ش. ۷-۱) با تبدیل فوریه گسسته زمانی برابر است. پس همانگونه که تبدیل لاپلاس تعمیمی از تبدیل فوریه پیوسته زمان است می توان تبدیل  $Z$  را تعمیمی از تبدیل فوریه گسسته زمان در نظر گرفت. بنابراین بسیاری از دنباله هایی که تبدیل فوریه ندارند دارای تبدیل  $Z$  خواهند بود.



شکل (۷-۱): نمایش متغیر مختلط  $Z$  در صفحه مختلط

دایره واحد در مورد تبدیل  $Z$  نقش مهمی مشابه نقش محور  $j\omega$  در مورد تبدیل لاپلاس ایفا می کند. با توجه به معادله (۷-۷) می توان گفت که شرط وجود (همگرایی) تبدیل  $Z$  همگرایی تبدیل فوریه  $x[n]r^{-n}$  است. برای هر سیگنال مشخص ممکن است این همگرایی بازاء مقادیر مشخصی از  $r$  میسر شود. همانند تبدیل لاپلاس، دامنه مقادیری از  $z$  که تبدیل  $Z$  همگرا می شود محدود به ناحیه همگرایی<sup>۱</sup> (ROC) است. اگر (ROC) شامل دایره واحد شود می توان گفت تبدیل فوریه هم همگرا خواهد بود (وجود دارد) برای واضح شدن مطلب به مثال ۷-۱ توجه کنید.

مثال (۷-۱): فرض کنید  $x[n] = a^n u[n]$  باشد در آنصورت تبدیل  $Z$  دنباله  $x[n]$  برابر است با

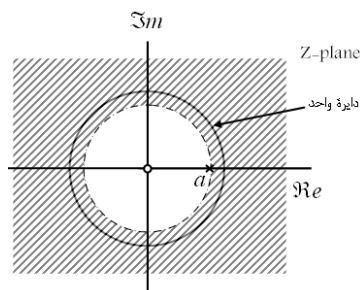
<sup>1</sup> Region of convergence

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n \quad (9-7)$$

برای همگرایی  $X(z)$  لازم است که طرف دوم تساوی همگرا شود. پس ناحیه همگرایی شامل مقادیری از  $z$  است که بازاء آنها  $|az^{-1}| < 1$  شود، یا  $|z| > |a|$  بنابراین

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad |z| > |a| \quad (10-7)$$

بنابراین اگر  $a$  محدود باشد،  $X(z)$  همگرا خواهد شد. اگر  $|a| < 1$  باشد چون ناحیه همگرایی شامل دایره واحد می شود، پس تبدیل فوریه وجود خواهد داشت. اما اگر  $|a| > 1$  باشد تبدیل فوریه وجود نخواهد داشت. نمودار صفر-قطب و ROC مثال (۱-۷) در شکل (۲-۷) ترسیم شده است.



شکل (۲-۷): ROC مربوط به  $x[n] = a^n u[n]$

با توجه به شکل اگر  $|a| < 1$  باشد تبدیل فوریه سیگنال وجود خواهد داشت. مشخص کردن ROC علاوه بر عبارت جبری  $X(z)$  بسیار مهم می باشد و در حقیقت شرط یکتا بودن تبدیل  $z$  نیز همین است در این مورد مثال (۲-۷) را ببینید.

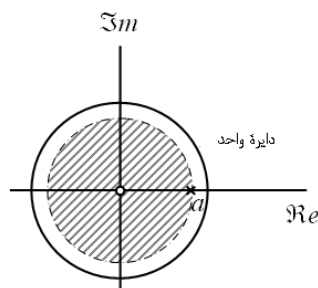
(۲-۷): اکنون فرص کنید

$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$

بنابراین

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -a^n z^{-n} u[-n-1] \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n = -\sum_{n=1}^{\infty} (az^{-1})^{-n} \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^n = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \end{aligned} \quad (11-7)$$

اگر  $|a^{-1}z| < 1$  باشد ( $|z| \leq |a|$ ) تبدیل  $z$  وجود دارد (ر.ک.ش. ۳-۷). در اینجا اگر  $|a| > 1$  باشد تبدیل فوریه همگرا خواهد شد و اگر  $|a| < 1$  باشد تبدیل فوریه وجود نخواهد داشت. با توجه به این دو مثال می توان قضاوت کرد که  $X(z)$  همواره کسری خواهد بود اگر  $x[n]$  ترکیب خطی از نمایی های حقیقی یا مختلط باشد.



شکل (۷-۳): ROC مربوط به  $x[n] = -a^n u[-n-1]$

با توجه به شکل اگر  $|a| > 1$  باشد تبدیل فوریه وجود نخواهد داشت.

مثال (۷-۳): اکنون دنباله زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad (۷-۱۳)$$

تبدیل Z چنین است.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} u[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} u[n] \quad (۷-۱۴)$$

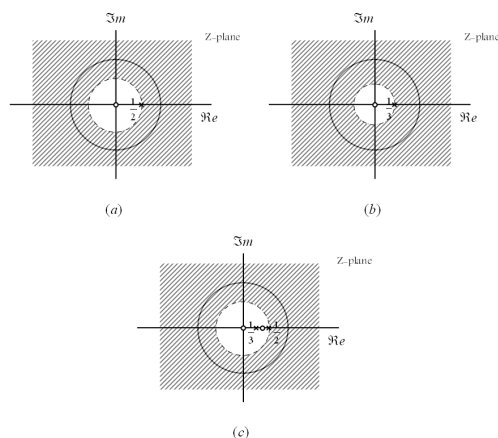
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)} + \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)} = \frac{z(2z - \frac{5}{6})}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)} \quad (۷-۱۵)$$

برای همگرا بودن  $X(z)$  لازم است که هر دو مجموع (۷-۱۵) همگرا باشند. پس باید  $\left|\frac{1}{2} z^{-1}\right| < 1$  و هم

$\left|\frac{1}{3} z^{-1}\right| < 1$  یا بطور معادل باید  $|z| > \frac{1}{2}$  و  $|z| > \frac{1}{3}$  شود، که بدین ترتیب ROC فصل مشترک این دو

می شود، یعنی  $|z| > \frac{1}{2}$  (ر.ک.ش. ۷-۴).



شکل (۴-۷): (a) ناحیه همگرایی و نمودار صفر و قطب  $x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$  (b) ناحیه همگرایی و نمودار صفر و قطب  $x_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$  (c) ناحیه همگرایی و نمودار صفر و قطب  $x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$

از مثال زیر می توان به خاصیت خطی بودن تبدیل Z پی برد، چون اگر داشته باشیم.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (۱۶-۷)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)}, \quad |z| > \frac{1}{3} \quad (۱۷-۷)$$

در آنصورت

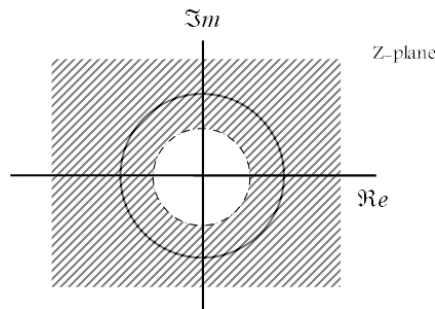
$$\left[ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)} + \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (۱۸-۷)$$

نکته جالبی دیگری که از این سه مثال به آن پی می بریم این است که برای دنباله هایی که در  $n < 0$  مساوی صفر هستند،  $X(z)$  فقط شامل توان های منفی Z است. پس برای اینگونه دنباله ها مناسب تر است که  $X(z)$  را بر حسب چند جمله ای از توان  $z^{-1}$  بیان نمود (نه بر حسب Z). بدین ترتیب بررسی محل قطب ها و ناحیه همگرایی ساده تر خواهد بود.

## ۷-۲ ناحیه همگرایی تبدیل Z

در این قسمت مشابه فصل قبل خواصی برای ناحیه همگرایی ذکر می شود که در شناخت ناحیه همگرایی فقط با دانستن نمودار صفر و قطب کمک می کنند و همانند ناحیه همگرایی در تبدیل لاپلاس بسیاری از خواص سیستم ها و دنباله ها را می توان از شکل نواحی همگرایی آنها استخراج کرد.

خاصیت ۱: ناحیه همگرایی  $X(z)$  شامل یک حلقه در صفحه  $z$  است که مرکز آن مبدأ مختصات می باشد (به شکل (۵-۷) دقت کنید). همانطور که گفتیم ROC شامل مقادیری از  $z = re^{j\Omega}$  است که بازاء آن تبدیل فوریه  $x[n]r^{-n}$  همگرا می باشد. بنابراین ناحیه همگرایی فقط به  $|z| = r$  بستگی دارد و به  $\Omega$  بستگی ندارد. در نتیجه برای یک مقدار مشخص  $z_0$  در ROC، تمام مقادیر  $z$  که دارای دامنه ای برابر  $z_0$  هستند در ROC قرار می گیرند.



شکل (۵-۷): ناحیه همگرایی در حالت کلی شامل یک حلقه در صفحه  $z$  است.

خاصیت ۲: ROC شامل هیچ قطبی نمی شود.

همانند تبدیل لاپلاس این خاصیت نتیجه این واقعیت است که  $X(z)$  در قطب بینهایت است و در قطب همگرا نمی شود.

خاصیت ۳: اگر  $x[n]$  دارای دوره محدود باشد، ROC شامل تمام صفحه  $z$  بجز احتمالاً  $z = 0$  یا  $z = \infty$  می شود. چون یک دنباله با دوره محدود دارای تعداد محدودی غیر صفر است. به عنوان مثال از  $n = N_1$  تا  $n = N_2$  محدودند. بنابراین تبدیل  $z$  فقط شامل چند نقطه خواهد بود (رابطه ۷-۱۹).

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n} \quad (۱۹-۷)$$

اگر  $z$  مساوی صفر یا بینهایت نباشد هر جمله در مجموع فوق محدود و در نتیجه  $X(z)$  همگرا خواهد شد. اگر  $N_1$  منفی و  $N_2$  مثبت باشد بگونه ای که  $x[n]$  دارای مقادیر غیر صفر در هر دو طرف محور  $(n < 0, n > 0)$  باشد، نتیجتاً مجموع (۱۹-۷) شامل توان های مثبت و منفی از  $z$  خواهد بود. با میل کردن  $|z|$  بسمت صفر جمله هایی که شامل توان های منفی  $z$  هستند نامحدود می شوند و با میل کردن  $|z|$  بسمت بینهایت جمله هایی که شامل توان های مثبت  $z$  هستند نامحدود می شوند. بنابراین ROC نمی تواند شامل صفر یا بینهایت شود. اگر  $N_1$  صفر یا مثبت شود در این صورت فقط توان های منفی  $z$  در معادله (۱۹-۷) ظاهر می شوند و در نتیجه ROC شامل  $z = \infty$  خواهد بود. بالعکس اگر  $N_2 = 0$  یا منفی باشد، فقط جمله های با توان مثبت  $z$  در معادله (۱۹-۷) ظاهر می شوند و در نتیجه ROC شامل  $z = 0$  می شود.

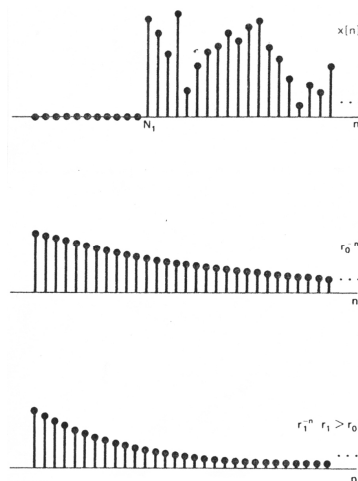
خاصیت ۴: اگر  $x[n]$  یک دنباله راست‌رو و اگر  $|z| = r_0$  در ROC واقع باشد، در آنصورت همه مقادیر Z که در نامعادله  $|z| > r_0$  صدق می‌کنند، در ROC قرار خواهند گرفت. توضیح این خاصیت دقیقاً مشابه توضیح خاصیت ۴ در فصل قبل است. یک دنباله راست‌رو، بازاً مقادیر  $n$  که کوچکتر از یک مقدار مشخص  $n_0$  باشند مساوی صفر است. اگر دایره  $|z| = r_0$  در ROC قرار گیرد،  $x[n]r_0^{-n}$  بطور مطلق جمع‌پذیر خواهد بود (تبدیل فوری  $x[n]r_0^{-n}$  موجود است). از آنجائیکه دنباله  $x[n]$ ، راست‌رو است حاصلضرب عبارت  $x[n]$  در هر دنباله نمایی  $r_0^{-n}$  که با افزایش  $n$  با سرعتی بیش از  $r_0^{-n}$  کاهش یابد نیز بطور مطلق جمع‌پذیر خواهد بود (به شکل (۶-۷) توجه کنید). به عبارت ریاضی اگر فرض کنیم  $|z| = r_1$

$$|X(z)| \leq \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| |z|^{-n} = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_1^{-n} = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| \frac{r_1^{-n}}{r_0^{-n}} r_0^{-n}$$

چون  $r_1 > r_0$  است پس تابع  $(\frac{r_1}{r_0})^{-n}$  یک تابع نمایی کاهنده است و بیشترین مقدارش را در فاصله وجود

$x[n]$  در  $n = N_1$  اتخاذ می‌کند. پس

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-n} r_0^{-n} \leq \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-N_1} \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} \leq \infty$$



شکل (۶-۷): اگر حاصلضرب  $x[n]r_0^{-n}$  همگرا باشد حتماً حاصلضرب  $x[n]r_1^{-n}$  ( $r_1 > r_0$ ) همگراست.

برای یک دنباله راست‌رو، معادله (۳-۷) بصورت زیر در خواهد آمد.

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad (۷-۲۰)$$

که  $N_1$  محدود ولی ممکن است مثبت یا منفی باشد. اگر  $N_1$  منفی باشد مجموع رابطه (۷-۲۰) شامل عبارت‌هایی با توان مثبت  $Z$  می‌باشد که با میل کردن  $|Z|$  بسمت بینهایت بطور نامحدود بزرگ می‌شود. بنابراین برای یک دنباله راسترو در حالت عمومی ROC شامل بینهایت نخواهد شد.

خاصیت ۵: اگر  $x[n]$  یک دنباله چپرو و اگر دایره  $|z| = r_0$  در ROC قرار داشته باشد، در اینصورت همه مقادیر  $Z$  که در نامعادله  $0 < |z| < r_0$  صدق کنند در ROC قرار خواهند گرفت.

از اثبات این خاصیت که مشابه خاصیت قبلی ثابت می‌شود صرفنظر می‌گردد.

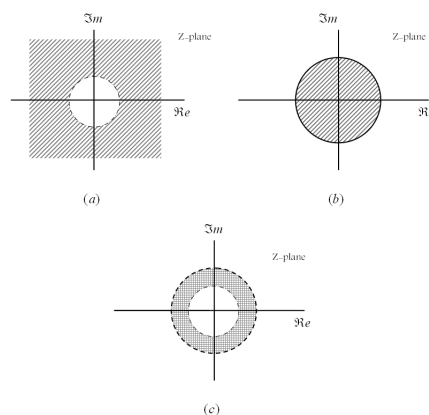
برای یک دنباله چپرو معادله (۷-۳) که بیانگر تبدیل  $Z$  است بصورت معادله (۷-۲۱) در می‌آید.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{N_2} x[n]z^{-n} \quad (۷-۲۱)$$

که در آن  $N_2$  ممکن است مثبت و یا منفی باشد. اگر  $N_2$  مثبت باشد معادله (۷-۲۱) شامل توان‌های منفی  $Z$  نیز خواهد بود که با میل کردن  $|Z|$  بسمت صفر، بطور نامحدود بزرگ خواهند شد. نتیجتاً در حالت کلی برای دنباله‌های چپرو، ROC شامل  $z=0$  نخواهد بود. البته در حالت خاص برای دنباله‌های "ضدعلی" ( $x[n] = 0$  برای  $n \geq 0$ ) که برای آنها  $N_2$  در معادله (۷-۲۱) کوچکتر یا مساوی صفر است، ROC شامل  $z=0$  خواهد بود.

خاصیت ۶: اگر  $x[n]$  دو طرفه و اگر دایره  $|z| = r_0$  در ROC قرار داشته باشد، در اینصورت ROC شامل یک حلقه در صفحه  $Z$  است که شامل دایره  $|z| = r_0$  خواهد بود.

مشابه خاصیت ۶ تبدیل لاپلاس (فصل قبل) می‌توان یک دنباله دوطرفه را، بصورت مجموع دو دنباله راسترو و چپرو تفکیک کرد. ROC برای قسمت راسترو ناحیه‌ای است که از داخل بوسیله یک دایره محدود می‌شود و از خارج تا بینهایت ادامه پیدا می‌کند. ولی ROC برای قسمت چپرو ناحیه‌ای است که از خارج بوسیله یک دایره محدود شده و تا صفر ادامه پیدا می‌کند. بنابراین فصل مشترک این دو ناحیه همگرایی یک حلقه خواهد بود (به شکل ۷-۷ توجه کنید).



شکل (۷-۷): ناحیه همگرایی یک دنباله با دوره محدود از فصل مشترک نواحی همگرایی دو دنباله راسترو و چپرو بدست می‌آید.

البته گاهی ممکن است یک یا دو ناحیه همگرایی فصل مشترک نداشته باشند که در آنصورت تبدیل Z وجود نخواهد داشت. اکنون خواص گفته شده را به کمک چندین مثال توضیح می دهیم.  
مثال (۷-۴): دنباله دوره محدود زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n] = \begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad a > 0 \quad (۷-۲۲)$$

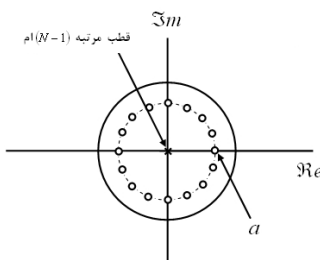
بنابر این

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n \quad (۷-۲۳)$$

وباستفاده از خاصیت تصاعد هندسی

$$X(z) = \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a} \quad (۷-۲۴)$$

چون  $x[n]$  دارای طول محدود است، از خاصیت ۳ پی می بریم که ROC شامل همه صفحه Z است بجز احتمالاً مبدا و یا  $\infty$ . در حقیقت چون  $x[n]$  برای  $n < 0$  مساوی صفر است ROC تا بینهایت امتداد پیدا می کند. اما چون  $x[n]$  برای بعضی از مقادیر مثبت n غیر صفر است ROC نمی تواند شامل مبدا باشد. این مطلب از (۷-۲۳) هم کاملاً پیداست. اگر نمودار صفروقطب را برای  $X(z)$  رسم کنیم می بینیم که  $X(z)$  دارای یک قطب مرتبه  $(N-1)$  ام در  $z=0$  است و همچنین N ریشه صورت نیز در نقاط  $\left( z_k = ae^{j\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}, k=0,1,\dots,N-1 \right)$  قرار دارند. صفر به از  $k=0$ ، قطب در  $z=a$  را خنثی می کند. در نتیجه تنها یک قطب در مبدا خواهیم داشت. پس ناحیه همگرایی همه صفحه Z بجز  $z=0$  است.



شکل (۷-۸): نمودار قطب-صفر برای  $X(z)$  مربوط به مثال (۷-۴)

مثال (۷-۵): دنباله دو طرفه فرض کنید.

$$x[n] = b^{|n|}, b > 0 \quad (۷-۲۴)$$

این دنباله در شکل (۷-۹) رسم شده است.

اگر بخواهیم تبدیل Z این دنباله دو طرفه را بدست آوریم باید ابتدا آنرا به دو دنباله چپرو و راسترو تقسیم کنیم، بنابراین داریم.

$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1] \quad (۲۵-۷)$$

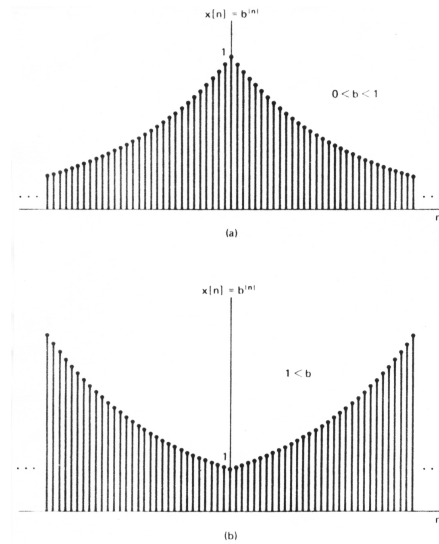
قبلاً؛ مثال (۱-۷) تبدیل Z دنباله راسترو را بدست آوردیم.

$$b^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-bz^{-1}} = X_1(z) \quad |z| > b \quad (۲۶-۷)$$

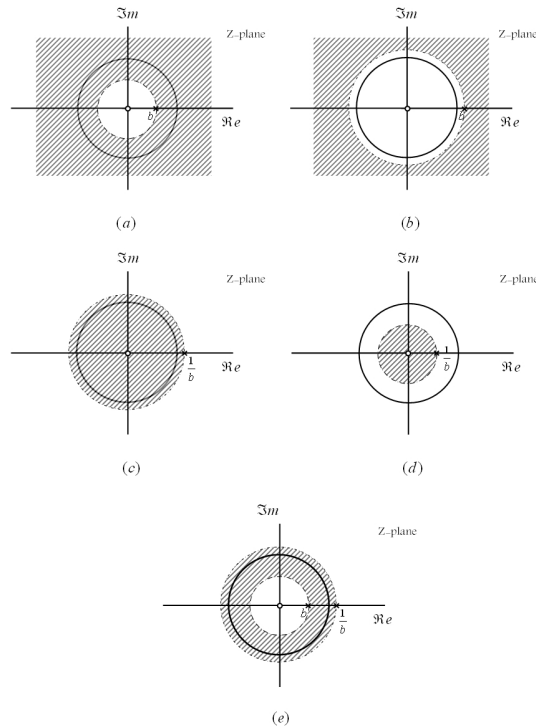
و از مثال (۲-۷) تبدیل Z دنباله چپرو را بدست آوردیم.

$$b^{-n} u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{-1}{1-b^{-1}z^{-1}} = X_2(z) \quad |z| < \frac{1}{b} \quad (۲۷-۷)$$

در شکل (۱۰-۷) نمودار صفر و قطب و همچنین ROC را برای معادلات (۲۶-۷) و (۲۷-۷) رسم کرده‌ایم.



شکل (۹-۷): دنباله  $x[n] = b^{|n|}$  (a) بازاء  $0 < b < 1$  (b) بازاء  $1 < b$



شکل (۷-۱۰): نمودار صفر و قطب و همچنین ROC برای (a)  $X_1(z)$  وقتی  $0 < b < 1$  و (b)  $X_1(z)$  وقتی  $b > 1$  و (c)  $X_2(z)$  وقتی  $0 < b < 1$  و (d)  $X_2(z)$  وقتی  $b > 1$  و (e) فصل مشترک دو ناحیه وقتی  $0 < b < 1$  است.

اگر  $b > 1$  باشد هیچ ناحیه مشترک همگرایی وجود نخواهد داشت و بنابراین دنباله رابطه (۷-۲۴) دارای تبدیل Z نخواهد بود. ولی اگر  $b < 1$  باشد، ROCهای معادلات (۷-۲۶) و (۷-۲۷) ناحیه مشترک خواهند داشت و بنابراین تبدیل Z برای دنباله مورد نظر چنین خواهد شد.

$$X(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} - \frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}} \quad b < |z| < \frac{1}{b}$$

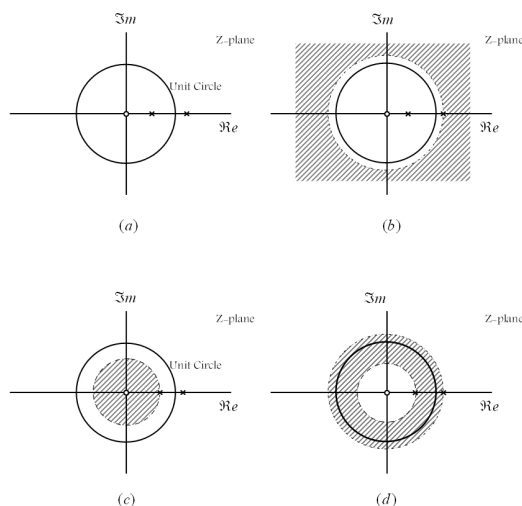
$$= \frac{b^2 - 1}{b} \frac{z}{(z-b)(z-b^{-1})} \quad (7-28)$$

نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی در شکل (۷-۱۰) نمایش داده شده‌اند. در فصل تبدیل لاپلاس گفتیم که برای تبدیل لاپلاس کسری، ناحیه همگرایی همیشه بوسیله قطب‌ها یا بینهایت محدود می‌شود. در مثال‌های قبلی نظیر چنین پیشامدی را نیز مشاهده کردیم. در مورد تبدیل Z نیز می‌توان گفت که ناحیه همگرایی هرگز شامل قطب نخواهد بود و همچنین ناحیه همگرایی بوسیله قطب‌ها یا بینهایت محدود خواهد شد. بنابراین برای یک نمودار صفر و قطب خاص (یا یک عبارت کسری تبدیل Z) تنها چند ناحیه همگرایی محدود می‌توان بدست آورد که اگر اطلاع دیگری از

نحوه رفتار دنباله در زمان داشته باشیم می توان بسادگی از میان آن چند ناحیه، یکی را بعنوان ناحیه همگرایی اصلی انتخاب کرد. برای روشن برای مطلب به مثال (۶-۷) توجه کنید. مثال (۶-۷): فرض کنید تبدیل  $Z$  یک دنباله به صورت زیر داده شده باشد.

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{5}{4}z^{-1}\right)} \quad (۲۹-۷)$$

کلیه نمودارهای صفر و قطب ممکن مربوط به این رابطه در شکل (۷-۱۱-a) رسم شده است.



شکل (۷-۱۱): نواحی همگرایی ممکن برای یک عبارت  $X(z)$  (a) نمودار قطب-صفر مربوط به  $X(z)$  در مثال (۶-۷) (b) ناحیه همگرایی  $X(z)$  اگر  $x[n]$  یک دنباله راست رو باشد (c) ناحیه همگرایی  $X(z)$  اگر  $x[n]$  یک دنباله چپ رو باشد (d) ناحیه همگرایی  $X(z)$  اگر  $x[n]$  یک دنباله دو طرفه باشد.

در این مثال سه ناحیه همگرایی محتمل را می توان بدست آورد که همه آنها مربوط به یک عبارت  $X(z)$  می توانند باشند. (به شکل (۷-۱۱-d)  $b \rightarrow d$ ) توجه کنید) هر کدام از این سه ناحیه مربوط به یک دنباله در حوزه زمان هستند. ناحیه شکل (۷-۱۱-b) مربوط به دنباله زیر است.

$$x[n] = \left[ -\frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^n + \frac{5}{3} \left( \frac{5}{4} \right)^n \right] u[n] \quad (۳۰-۷)$$

این دنباله علی است ولی تبدیل فوریه ندارد چون ROC شامل دایره واحد نمی شود ناحیه شکل (۷-۱۱-c) مربوط به دنباله زیر است.

$$x[n] = \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^n - \frac{5}{3} \left( \frac{5}{4} \right)^n \right] u[-n-1] \quad (۳۱-۷)$$

این دنباله ضد علی است و همچنین تبدیل فوریه ندارد. ناحیه شکل (۷-۱۱-d) مربوط به دنباله زیر است

$$x[n] = -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{5}{3} \left(\frac{5}{4}\right)^n u[-n-1] \quad (۷-۳۲)$$

این دنباله ضد علی است ولی دارای تبدیل فوریه است چون ROC شامل دایره واحد می باشد.

### ۷-۳ تبدیل معکوس Z

جهت استخراج رابطه معکوس Z ابتدا طرفین رابطه تبدیل Z را در  $z^{k-1}$  ( $k$  عدد صحیح دلخواه) ضرب کرده و از حاصل طرفین تساوی حول دایره  $c$  بشعاع  $r$  در درون ناحیه همگرایی و در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت انتگرال می گیریم.

$$\oint_c X(z) z^{k-1} dz = \oint_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{k-n-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \oint_c z^{k-n-1} dz \quad (۷-۳۳)$$

اما باید توجه به قضیه انتگرال کوشی می دانیم که حاصل انتگرال طرف راست برابر است با

$$\oint_c z^{k-n-1} dz = 2\pi j \times \{ \text{مجموع مانده ها در قطب ها} \} \quad (۷-۳۴)$$

بسادگی می بینیم که حاصل این انتگرال به ازای تمام مقادیر  $n$  مساوی صفر است (چون مانده هایش مساوی صفر می شوند) بجز وقتی که  $n = k$  می شود که در آن صورت

$$\oint_c z^{-1} dz = 2\pi j \quad \{z=0 \text{ قطب}\} \quad (۷-۳۵)$$

و اما

$$\{z=0 \text{ مانده}\} = \lim_{z \rightarrow 0} z(z^{-1}) = 1 \quad (۷-۳۶)$$

بنابراین با جایگزاری (۷-۳۵) و (۷-۳۶) در (۷-۳۳) داریم.

$$\oint_c X(z) z^{k-1} dz = x[k] 2\pi j \quad (۷-۳۷)$$

و یا

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz \quad (۷-۳۸)$$

که این رابطه مبین تبدیل Z معکوس است.

توجه کنید که انتگرال روی دایره ای بشعاع  $r$  در درون ناحیه همگرایی، بمرکز مبدا مختصات و در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت باید گرفته شود. بدست آوردن تبدیل معکوس از روی رابطه فوق اغلب مشکل است، اما چند راه ساده تر برای بدست آوردن تبدیل معکوس Z وجود دارد که به وسیله چند مثال آنها را روشن می کنیم.

### الف) بسط به کسور جزئی

مثال (۷-۷): مطلوبست  $x[n]$  اگر،

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \quad |z| > \frac{1}{3} \quad (39-7)$$

دو قطب یکی در  $z = \frac{1}{4}$  و دیگری در  $z = \frac{1}{3}$  وجود دارد ولی چون ROC شامل ناحیه خارجی بزرگترین قطب است باید  $x[n]$  یک دنباله راسترو باشد. برای بدست آوردن  $x[n]$  یک روش این است که  $X(z)$  را به کسرهای جزئی تبدیل کنیم، اما بهتر است کسرهای جزئی را بر حسب  $z^{-1}$  بدست آورد. بنابراین داریم

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad (40-7)$$

به این ترتیب دیده می شود که  $x[n]$  شامل دو عبارت است که هر عبارت متناظر با یکی از کسرهای جزئی معادله (۴۰-۷) می باشد. برای بدست آوردن تبدیل معکوس Z مربوط به هر عبارت باید ابتدا ROC را برای هر عبارت بطور جداگانه بدست آورد. اما چون می دانیم ناحیه همگرایی  $X(z)$  خارج از بزرگترین قطب قرار دارد، می توانیم بگوئیم که ناحیه همگرایی هر یک از کسرهای جزئی باید در خارج از قطبها ی مربوط به خودشان باشد. بنابراین

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] \quad (41-7)$$

که در آن

$$x_1[n] \stackrel{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{4} \quad (42-7)$$

$$x_2[n] \stackrel{z}{\leftrightarrow} \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{3} \quad (43-7)$$

بنابراین

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (44-7)$$

$$x_2[n] = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad (45-7)$$

بنابراین از مجموع دو رابطه (۴۴-۷) و (۴۵-۷) به رابطه (۴۶-۷) می رسیم.

$$x[n] = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] u[n] \quad (46-7)$$

مثال (۷-۸): (بسط به کسور جزئی) اکنون عبارت  $X(z)$  که در مثال (۷-۷) مطرح شد را در نظر بگیرید. اما ناحیه همگرایی را بصورت  $\left(\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}\right)$  فرض کنید برای بدست آوردن  $x[n]$  باید  $X(z)$  را مشابه مثال قبلی به دو کسر جزئی تبدیل کنیم. اما ناحیه همگرایی این دو عبارت متفاوت خواهد بود. در این مثال ناحیه همگرایی هر یک از کسور جزئی چنین می شود.

$$x_1[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{4} \quad (۷-۴۷)$$

$$x_2[n] \leftrightarrow \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad |z| < \frac{1}{3} \quad (۷-۴۸)$$

و بنابراین داریم

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] \quad (۷-۴۹)$$

### ب) استفاده از روش سری توانی

یکی دیگر از روش های مفید برای محاسبه تبدیل معکوس Z تجزیه  $X(z)$  به سری توانی می باشد برای توضیح روش فوق به مثال زیر توجه کنید  
مثال (۷-۹): مطلوبست  $x[n]$  اگر،

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a| \quad (۷-۵۰)$$

این عبارت را بصورت سری توانی بکمک تقسیمات متوالی تجزیه می کنیم.

$$\begin{aligned} 1 & \quad \frac{1 - az^{-1}}{1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots} \\ \frac{1 - az^{-1}}{az^{-1}} & \\ \frac{az^{-1} - a^2 z^{-2}}{a^2 z^{-2}} & \end{aligned}$$

بنابراین داریم.

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots \quad (۷-۵۱)$$

با مقایسه رابطه (۷-۵۱) با رابطه (۷-۳) و مساوی قرار دادن ضرائب می بینیم که

$$\begin{aligned}x[n] &= 0 & n < 0 \\x[0] &= 1 \\x[1] &= a \\x[2] &= a^2\end{aligned}$$

و در حالت کلی

$$x[n] = a^n u[n] \quad (۵۲-۷)$$

بسط سری توانی  $\frac{1}{1-az^{-1}}$  که در رابطه (۵۱-۷) داده شده است برای  $|az^{-1}| < 1$  صدق می کند با  $|z| > |a|$ . اگر ناحیه همگرایی بصورت  $|z| < |a|$  باشد  $(|az^{-1}| > 1)$  باید  $X(z)$  را باید بر حسب توان های مثبت  $Z$  بسط داد. در اینصورت داریم.

$$\begin{aligned}1 &= \frac{-az^{-1} + 1}{-a^{-1}z - a^{-2}z^2 + \dots} \\&= \frac{1 - a^{-1}z}{a^{-1}z} \\&= \frac{a^{-1}z - a^{-2}z^2}{a^{-2}z^2}\end{aligned}$$

یا

$$\frac{1}{1-az^{-1}} = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - \dots \quad (۵۳-۷)$$

در این حالت با مقایسه مجدد رابطه (۵۳-۷) با رابطه (۳-۷) و مساوی قرار دادن ضرایب داریم

$$\begin{aligned}x[n] &= 0 & n \geq 0 \\x[-1] &= -a^{-1} \\x[-2] &= -a^{-2}\end{aligned}$$

و در حالت کلی

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \quad (۵۴-۷)$$

قدرت روش بسط سری توانی برای عبارات غیر کسری بیشتر نمود پیدا می کند چون اینگونه عبارات را نمی توان با تبدیل به کسرهای جزئی ساده کرد. برای توضیح بیشتر به مثال زیر توجه کنید

مثال (۱۰-۷): (بسط به سری توانی)

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a| \quad (۵۵-۷)$$

با  $|az^{-1}| < 1$  می توان رابطه (۵۵-۷) را بکمک سری تیلور به سری توانی بسط داد (البته به شرط  $|az^{-1}| < 1$ ).

$$\log(1+w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} w^n}{n} \quad |w| < 1 \quad (۵۶-۷)$$

بنابراین داریم.

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n} \quad (57-7)$$

که بکمک آن می توان  $x[n]$  را بصورت زیر بدست آورد.

$$x[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n} & n \geq 1 \\ 0 & n \leq 0 \end{cases} \quad (58-7)$$

یا بطور معادل

$$x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1] \quad (59-7)$$

## ۴-۷ خواص تبدیل Z

مانند تبدیل لاپلاس، تبدیل Z دارای خواص مهمی است که آنرا در تجزیه و تحلیل سیستم های LTI گسسته زمانی موفق نموده است. به تعدادی از این خواص فهرست وار و مختصراً اشاره خواهد شد.

### ۴-۷-۱ خطی بودن

اگر  $X_1(Z)$  و  $X_2(Z)$  بترتیب تبدیل های دنباله های  $x_1[n]$ ،  $x_2[n]$  باشند بعبارت دیگر اگر

$$x_1[n] \xleftrightarrow{z} X_1(Z) \quad ROC = R_1 \quad (60-7)$$

و

$$x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_2(Z) \quad ROC = R_2 \quad (61-7)$$

در آنصورت تبدیل ترکیب خطی این دو دنباله برابر است با

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z) \quad ROC \text{ شامل } R_1 \cap R_2 \text{ است} \quad (62-7)$$

ناحیه همگرایی ترکیب خطی، حداقل شامل ناحیه مشترک  $R_1$  و  $R_2$  است برای دنباله هایی با تبدیل Z های کسری، اگر قطب های  $aX_1(z) + bX_2(z)$  همان قطب های  $X_1(z)$  و  $X_2(z)$  باشند (یعنی صفر و قطب ها همدیگر را خنثی نکنند)، ناحیه همگرایی دقیقاً همان ناحیه مشترک  $R_1 \cap R_2$  خواهد بود. اما اگر در ترکیب خطی احتمال دارد تعدادی از صفرها بعضی از قطب ها را خنثی کنند، در آنصورت ناحیه همگرایی ممکن است بزرگتر شود. مثال ساده آن هنگامی است که  $x_1[n]$  و  $x_2[n]$  دارای دوره نامحدود باشند، اما ترکیب خطی آنها دارای دوره محدود است. در این حالت ناحیه همگرایی ترکیب خطی، تمام صفحه Z خواهد بود مگر احتمالاً صفر یا بینهایت. بعنوان مثال دنباله های  $a^n u[n-1]$  و

$$a^n u[n] \quad \text{هر دو دارای ناحیه همگرایی } |z| > |a| \text{ هستند. اما ناحیه همگرایی دنباله زیر}$$

$$a^n u[n] - a^n u[n-1] = \delta[n] \quad (63-7)$$

شامل تمام صفحه Z است.

### ۴-۷-۲ انتقال در حوزه زمان

اگر

$$x[n] \leftrightarrow^z X(z) \quad ROC = R_x$$

در آنصورت

$$x[n - n_0] \leftrightarrow^z z^{-n_0} X(z) \quad ROC = R_x \quad (۶۴-۷)$$

با این تفاوت که مبدا یا بینهایت را باید احتمالاً حذف و یا اضافه کرد. بخاطر ضرب در  $z^{-n_0}$  اگر  $n_0 > 0$  باشد یک قطب در  $z = 0$  وجود می آید و اگر قطبی در بینهایت از قبل موجود باشد اکنون حذف می شود. بنابراین اگر  $R_x$  شامل مبدا باشد در اینصورت ناحیه همگرایی  $x[n - n_0]$  شامل مبدا نخواهد بود. ولی اگر  $n_0 < 0$  باشد یک صفر در  $z = 0$  و یک قطب در بینهایت وجود می آید که صفر در  $z = 0$  می تواند یک قطب در  $z = 0$  (اگر وجود داشته باشد) را حذف کند بنابراین اگر  $X(z)$  شامل قطبی در مبدا باشد اکنون حذف می شود.

### ۳-۴-۷ انتقال در حوزه فرکانس

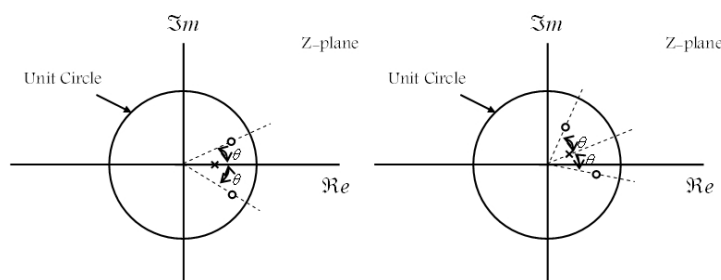
اگر

$$x[n] \leftrightarrow^z X(z) \quad ROC = R_x$$

در آنصورت

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \leftrightarrow^z X(e^{-j\Omega_0} z) \quad ROC = R_x \quad (۶۵-۷)$$

سمت چپ رابطه (۶۵-۷) نمایانگر مدولاسیون دنباله با حامل نمایی مختلط است و سمت راست بیانگر چرخش در صفحه  $z$  است. یعنی نمودار صفر و قطب در صفحه  $z$  به اندازه زاویه  $\Omega_0$  می چرخد (به شکل (۱۲-۷) توجه کنید).



شکل (۱۲-۷): تاثیر بر نمودار قطب-صفر مدولاسیون حوزه زمانی با دنباله نمایی مختلط  $e^{j\Omega_0 n}$

مثلاً اگر  $X(z)$  کسری باشد و در صورت یا مخرج کسر دارای فاکتوری بصورت  $1 - az^{-1}$  باشد، عبارت  $X(e^{-j\Omega_0} z)$  دارای فاکتوری بصورت  $1 - ae^{j\Omega_0} z^{-1}$  خواهد شد. بنابراین قطب یا صفر در  $z = a$  در  $X(z)$  اکنون تبدیل به قطب یا صفر در  $z = ae^{j\Omega_0}$  خواهد شد. بنابراین ضرب دنباله در نمایی مختلط یا عمل مدولاسیون بیانگر انتقال در فرکانس (در تبدیل فوریه) دنباله خواهد بود. اگر  $x[n]$  حقیقی باشد  $e^{j\Omega_0 n} x[n]$  چنین نخواهد بود مگر اینکه  $\Omega_0$  مضرب صحیحی از  $\pi$  باشد. نتیجتاً

اگر قطبها و صفرهای  $X(z)$  بصورت جفت مزدوج مختلط باشند (در حالتی که  $x[n]$  حقیقی است) ممکن است بعد از انتقال این تقارن از بین برود. در حالت کلی تر داریم.

$$z_0^{-n} x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad ROC = z_0 R_x \quad (۶۶-۷)$$

اگر  $|z_0| = 1$  باشد یا  $z_0 = e^{j\Omega_0 n}$  معادله (۶۶-۷) به معادله (۶۵-۷) تبدیل می شود. اما اگر  $z_0 = re^{j\Omega_0 n}$  باشد، مکان صفرها و قطبها در صفحه Z ضمن آنکه باندازه زاویه  $\Omega_0$  می چرخند در مقدار  $r$  نیز ضرب می شوند، یا بعبارت دیگر در امتداد شعاع ثابتی حرکت می کنند. بنابراین ROC نیز بزرگتر یا کوچکتر می شود. یعنی اگر  $z_x$  در ناحیه همگرایی تبدیل  $x[n]$  باشد،  $z_0 z_x$  در ناحیه همگرایی تبدیل  $z_0^{-n} x[n]$  خواهد بود. اگر  $|z_0| > 1$  باشد  $|z_0 z_x|$  بزرگتر و اگر  $|z_0| < 1$  باشد  $|z_0 z_x|$  کوچکتر خواهد شد.

#### ۴-۴-۷ معکوس کردن در حوزه زمان

اگر

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad ROC = R_x$$

در آنصورت

$$x[-n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{1}{z}\right) \quad ROC = 1/R_x \quad (۶۷-۷)$$

معنی رابطه فوق این است که اگر  $z_0$  در ناحیه همگرایی  $x[n]$  باشد،  $\frac{1}{z_0}$  در ناحیه همگرایی  $x[-n]$  است.

تمرین: رابطه (۶۷-۷) را ثابت کنید.

#### ۵-۴-۷ خاصیت کانولوشن

اگر

$$x_i[n] \xleftrightarrow{z} X_i(z) \quad ROC = R_i, \quad i=1,2$$

در آنصورت

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z) X_2(z) \quad ROC = R_1 \cap R_2 \quad (۶۸-۷)$$

مشابه خاصیت کانولوشن در تبدیل لاپلاس ناحیه همگرایی  $X_1(z) X_2(z)$  حداقل شامل ناحیه مشترک بین  $R_1, R_2$  است، البته ممکن است بزرگتر هم بشود بشرطی که بعضی از قطبها توسط تعدادی از صفرها خنثی شوند.

#### ۶-۵-۷ مشتق گیری در حوزه Z

اگر

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad ROC = R_x$$

در آنصورت

$$nx[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz} \quad ROC = R_x \quad (۶۹-۷)$$

این خاصیت به روشی مشابه با تبدیل لاپلاس بدست می آید کاربرد خاصیت فوق را در مثال زیر شرح می دهیم.

مثال (۷-۱۱): می خواهیم تبدیل معکوس  $X(z)$  را بیابیم اگر  $X(z)$  بصورت زیر باشد.

$$X(z) = \ln(1 + az^{-1}) \quad |z| > |a| \quad (۷۰-۷)$$

در آنصورت با توجه به خاصیت (۷-۴-۶) می توان نوشت.

$$nx[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}} \quad |z| > |a| \quad (۷۱-۷)$$

با مشتق گیری از  $X(z)$  آنرا تبدیل به عبارت کسری نمودیم. اکنون تبدیل معکوس  $Z$  بسادگی بدست می آید. می دانیم که

$$a(-a)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{a}{1 + az^{-1}} \quad |z| > |a| \quad (۷۲-۷)$$

با کمک خاصیت (۷-۴-۲) داریم.

$$a(-a)^{n-1} u[n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}} \quad |z| > |a| \quad (۷۳-۷)$$

در نهایت به نتیجه زیر خواهیم رسید.

$$x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1] \quad (۷۴-۷)$$

مثال (۷-۱۲): تبدیل زیر را در نظر بگیرید.

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \quad |z| > |a| \quad (۷۵-۷)$$

از مثال (۷-۱) داریم.

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a| \quad (۷۶-۷)$$

بنابراین

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \quad (۷۷-۷)$$

### ۷-۴-۷ تئوری مقدار اولیه

اگر  $x[n] = 0$  بازاء  $n < 0$ ، در آنصورت خواهیم داشت.

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (۷۸-۷)$$

این خاصیت با حد گرفتن از دو طرف رابطه تبدیل  $Z$  بدست می آید. البته باید مد نظر داشت که  $x[n]$  بازاء  $n < 0$  مساوی صفر است.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0] \quad (۷۹-۷)$$

چون وقتی  $n=0$  است  $z^{-n}=1$  می شود و برای  $n>0$  تمام جملات در حد وقتی  $z \rightarrow \infty$  صفر می شوند. اولین نتیجه ای که از تئوری مقدار اولیه می توان گرفت این است که برای یک دنباله علی اگر  $x[0]$  محدود باشد، حد  $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$  نیز باید محدود باشد. نتیجتاً اگر  $X(z)$  بصورت کسری بیان شود درجه صورت نمی تواند بزرگتر از درجه مخرج شود، یا عبارت دیگر تعداد صفرها نمی تواند بیشتر از تعداد قطبها شود.

## ۷-۵ تحلیل سیستمهای LTI بکمک تبدیل z

تبدیل Z نقش مهمی را در تحلیل سیستمهای LTI گسسته زمانی ایفا می کند. از خاصیت کانولوشن می توان رابطه ورودی و خروجی یک سیستم را چنین بیان کرد.

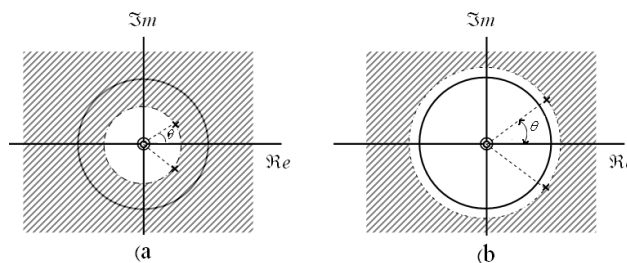
$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (۸۰-۷)$$

که در آن  $X(z)$ ،  $Y(z)$  و  $H(z)$  بترتیب تبدیل Zهای ورودی، خروجی و پاسخ ضربه سیستم هستند. به  $H(z)$  تابع سیستم یا ترابر تابع (تابع انتقال) می گویند. اگر  $|z|=1$  باشد تبدیل Z به تبدیل فوریه گسسته تبدیل می شود. خواص سیستم مثل پایداری و علیت را بسادگی می توان از نمودار صفر-قطب و ناحیه همگرایی تابع سیستم تعیین کرد. اگر سیستم علی باشد از خاصیت های ۲ و ۴ می توان گفت که ناحیه همگرایی در خارج آخرین قطب قرار دارد. اگر سیستم پایدار باشد باید پاسخ ضربه بطور مطلق جمع پذیر باشد که در این حالت تبدیل فوریه وجود خواهد داشت، لذا باید ناحیه همگرایی شامل دایره  $|z|=1$  شود. اگر سیستم هم علی و هم پایدار باشد باید تمام قطبها درون دایره واحد قرار داشته باشند.

مثال (۷-۱۳): تابع سیستم یک سیستم مرتبه دوم با قطبهای مختلط بصورت زیر است.

$$H(z) = \frac{1}{1 - (2r \cos \theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (۸۱-۷)$$

قطبها در  $z_1 = re^{j\theta}$ ،  $z_2 = re^{-j\theta}$  قرار دارند. اگر سیستم علی باشد ROC باید در خارج آخرین قطب قرار داشته باشد ( $|z| > |r|$ ). نمودار قطب-صفر و ROC در شکل (۷-۱۳) به نمایش گذاشته شده اند.



شکل (۷-۱۳): نمودار قطب-صفر برای سیستمهای مرتبه ۲ با قطبهای مختلط (a)  $r < 1$  (b)  $r > 1$

در شکل (۷-۱۳-a) می بینیم که  $|r| < 1$  و در اینصورت قطبها درون دایره واحد قرار می گیرند. در اینصورت سیستم پایدار است و در شکل (۷-۱۳-b) می بینیم  $|r| > 1$  است و قطبها در خارج دایره واحد قرار می گیرند. پس سیستم در این حالت ناپایدار است.

### ۷-۵-۱ نمایش سیستم با معادلات تفاضلی با ضرائب ثابت

با کمک تبدیل Z می توان از روی معادلات تفاضلی با ضرائب ثابت بسادگی تابع سیستم را بدست آورد. برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید  
مثال (۷-۱۴): فرض کنید سیستم LTI که ورودی آن  $x[n]$  و خروجی آن  $y[n]$  است بوسیله معادله تفاضلی زیر نمایش داده شده باشد.

$$y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3} x[n-1] \quad (7-82)$$

با تبدیل Z گرفتن از دو طرف رابطه (۷-۸۲) داریم.

$$Y(z) - \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) = X(z) + \frac{1}{3} X(z) z^{-1} \quad (7-83)$$

$$Y(z) = X(z) \left[ \frac{1 + \frac{1}{3} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \right]$$

و از رابطه (۷-۸۰) داریم.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \quad (7-84)$$

رابطه (۷-۸۴) فقط عبارت جبری  $H(z)$  است ولی ناحیه همگرایی را مشخص نمی کند. دو پاسخ ضربه متفاوت را می توان به معادله تفاضلی (۷-۸۲) مربوط کرد، یکی راسترو و دیگری چپرو. بنابراین دو انتخاب متفاوت برای ناحیه همگرایی امکان پذیر است.

الف:  $|z| > \frac{1}{2}$ ، که مربوط به  $h[n]$  راسترو است.

ب:  $|z| < \frac{1}{2}$  که مربوط به  $h[n]$  چپرو است.

برای حالت کلی معادله تفاضلی از مرتبه Nام نیز به همین ترتیب پیش می رویم. بعنوان مثال اگر معادله تفاضلی زیر نمایش دهنده یک سیستم LTI باشد.

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (7-85)$$

بنابراین:

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \quad (7-86)$$

یا

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad (۸۷-۷)$$

در نهایت می توان تابع انتقال را بصورت کسری نوشت.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (۸۸-۷)$$

می بینیم که تابع انتقال یک سیستم که بوسیله معادله تفاضلی خطی با ضرائب ثابت بیان می شود همواره کسری است. اما می بینیم معادله تفاضلی به تنهایی برای تعیین پاسخ ضربه سیستم کافی نیست و باید یک خاصیت دیگر سیستم مثل علی بودن یا پایدار بودن سیستم نیز بعنوان راهنمایی داده شده باشد. بعنوان مثال اگر بدانیم سیستم علی است، ناحیه همگرایی باید خارج آخرین قطب در نظر گرفته شود و اگر بدانیم سیستم پایدار است ناحیه همگرایی باید شامل دایره  $|z|=1$  نیز بشود.

مثال (۷-۱۵): یک سیستم علی با معادله تفاضلی بصورت زیر داده شده است.

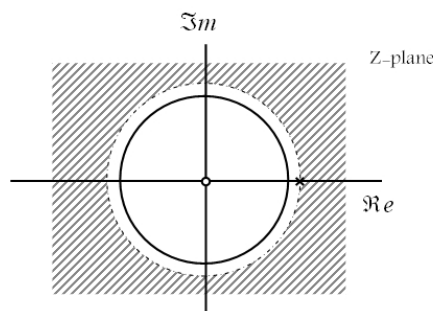
$$y[n] - \frac{5}{4} y[n-1] = x[n] \quad (۸۹-۷)$$

مطلوبست تابع انتقال و ناحیه همگرایی آن.

حل: مشابه مثال (۷-۱۴) می توان نوشت.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{1}{1 - \frac{5}{4} z^{-1}} \quad (۹۰-۷)$$

ناحیه همگرایی بصورت  $|z| > \frac{5}{4}$  بیان می گردد.



شکل (۷-۱۴): ناحیه همگرایی برای مثال (۷-۱۵)

می بینیم چنین سیستمی نمی تواند پایدار باشد مگر اینکه از اول فرض کنیم که سیستم غیر علی است.

## ۷-۶ تبدیل سیستم های پیوسته زمان به گسسته زمان

در بعضی از کاربردها بسیار مناسب است که یک سیستم پیوسته زمان بصورت یک سیستم گسسته زمان معادل تبدیل شود. بعنوان مثال در فصل پنجم مبحثی تحت عنوان پردازش گسسته زمان بر روی سیگنال های پیوسته زمان مورد بررسی قرار گرفت که مبنای آن استفاده از سیستم های گسسته زمان در پردازش سیگنال ها پیوسته زمان بود. این نوع پردازش به دلیل امکان استفاده از کامپیوتر در تحلیل نتایج، بسیار مهم و کاربردی می باشد. به همین خاطر روش های مختلفی جهت تبدیل سیستم های پیوسته زمان به گسسته زمان وجود دارد که در اینجا به دو روش مهم اشاره خواهیم کرد.

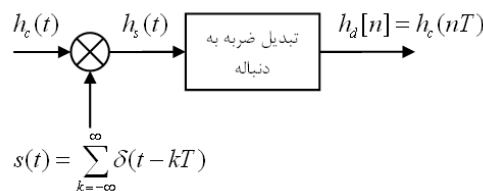
در روش اول که بنام تبدیل ضربه<sup>۲</sup> معروف است سیستم پیوسته زمان بگونه ای به سیستم گسسته زمان تبدیل می شود که نمونه های پاسخ ضربه پیوسته زمان در لحظات متساوی الفاصله با پاسخ ضربه گسسته زمان برابر است. بنابراین چون پاسخ ضربه گسسته زمان از نمونه برداری از پاسخ ضربه پیوسته حاصل می شود این روش فقط برای سیستم هایی که از لحاظ فرکانسی باند محدود هستند کاربرد دارد. در روش دوم که بنام تبدیل دوجهته<sup>۳</sup> معروف است از نوعی نگاشت استفاده می شود که مستقیماً تابع انتقال سیستم در حوزه لاپلاسی را به حوزه تبدیل Z تبدیل می نماید.

### ۷-۶-۱ تبدیل ضربه

یک سیستم مفروض پیوسته زمان با پاسخ ضربه  $h_c(t)$  را در نظر بگیرید. سیستم معادل گسسته زمانی که شامل نمونه های  $h_c(t)$  در لحظات متساوی الفاصله می باشد بصورت زیر تعریف می گردد.

$$h_d[n] = h_c(nT) \quad (۹۱-۷)$$

که در آن T یک عدد مثبت است و باید بطور صحیح انتخاب گردد. رابطه (۹۱-۷) را بصورت سیستم زیر نیز می توان نمایش داد.



شکل (۷-۱۵): سیستم معادل رابطه (۷-۹۱)

با توجه به آنچه در فصل پنجم بیان گردید می توان نوشت.

$$H_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\omega - j\frac{2\pi k}{T}\right) \quad (۹۲-۷)$$

و

<sup>۲</sup> Impulse Invariance

<sup>۳</sup> Bilinear Transformation

$$H_d(e^{j\Omega}) = H_s\left(j\frac{\Omega}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\left(\frac{\Omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right) \quad (۹۳-۷)$$

بنابراین سیستم گسسته زمانی  $H_d(e^{j\Omega})$  که توسط این روش بدست می آید بوسیله رابطه (۹۳-۷) به تابع انتقال سیستم  $H_c(j\omega)$  مربوط می شود. به همین خاطر لازم است  $\mathbf{T}$  به گونه ای انتخاب شود که از تداخل طیف های انتقال یافته  $H_c(j\omega)$  جلوگیری شود. در اینصورت  $H_d(e^{j\Omega})$  در یک دوره تناوب هم شکل  $H_c(j\omega)$  می شود. در حوزه زمان نیز داریم.

$$h_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_c(nT) \delta(t - nT) \quad (۹۴-۷)$$

بنابراین با توجه به اینکه تبدیل لاپلاس  $\delta(t - nT)$  مساوی  $e^{-snT}$  است داریم.

$$H_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_c(nT) e^{-snT} \quad (۹۵-۷)$$

اما از طرف دیگر داریم.

$$H_d(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n] z^{-n} \quad (۹۶-۷)$$

و چون

$$h_c(nT) = h_d[n] \quad (۹۷-۷)$$

می توان نوشت.

$$H_d(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_c(nT) z^{-n} \quad (۹۸-۷)$$

با مقایسه دو رابطه (۹۵-۷) و (۹۸-۷) داریم.

$$H_d(z) \Big|_{z=e^{sT}} = H_s(s) \quad (۹۹-۷)$$

بنابراین با جایگزینی  $s$  بجای  $j\omega$  در رابطه (۹۲-۷) داریم.

$$H_s(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(s - j\frac{2\pi k}{T}\right) \quad (۱۰۰-۷)$$

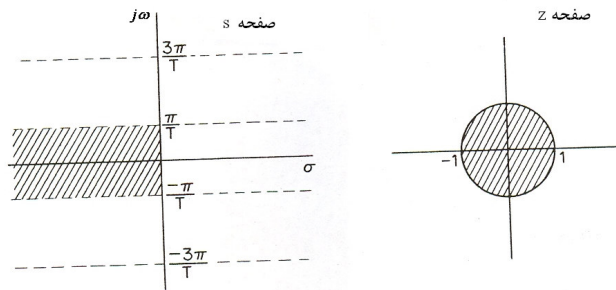
و یا بطور معادل

$$H_d(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(s - j\frac{2\pi k}{T}\right) \quad (۱۰۱-۷)$$

بنابراین روش تبدیل ضربه در حقیقت تبدیل  $H_s(s)$  به  $H_d(z)$  توسط نگاشت  $z = e^{sT}$  از صفحه  $s$  به صفحه  $z$  می باشد.

این نگاشت در شکل (۱۶-۷) نمایش داده شده است. نوارهاشور خورده در شکل (۷-۱۶-a) به تمام صفحه  $z$  نگاشته می شود.

با توجه به رابطه  $z = e^{sT}$  سمت چپ محور  $j\omega$  به داخل دایره نگاشته می شود و سمت راست محور  $j\omega$  به خارج دایره واحد نگاشته می شود. واضح است که محور  $j\omega$  روی دایره واحد نگاشته می شود.



شکل (۷-۱۶): نگاشت از صفحه  $s$  به صفحه  $z$  توسط تبدیل  $z = e^{sT}$

اگر  $H_c(s)$  بصورت کسری باشد رابطه  $H_d(z)$  بصورت ساده تری بدست می آید. بعنوان مثال اگر فقط قطب های مرتبه اول را برای  $H_c(s)$  در نظر بگیریم، یعنی اگر

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad (۷-۱۰۲)$$

در آن صورت

$$h_c(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t) \quad (۷-۱۰۳)$$

و یا

$$\begin{aligned} h_d[n] &= h_c(nT) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} u[nT] \\ &= \sum_{k=1}^N A_k (e^{s_k T})^n u[nT] \end{aligned} \quad (۷-۱۰۴)$$

و در نهایت

$$H_d(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \quad (۷-۱۰۵)$$

مثال (۷-۱۶): بکمک روش تبدیل ضربه سیستم گسسته زمانی معادل سیستم زیر را بیابید.

$$H_c(s) = \frac{4}{s+2} \quad \Re[s] > -2 \quad (۷-۱۰۶)$$

حل: با توجه به ناحیه همگرایی می توان نوشت.

$$h_c(t) = 4e^{-2t} u(t) \quad (۷-۱۰۷)$$

بنابراین معادل گسسته زمانی سیستم فوق برابر است با

$$h_d[n] = h_c(nT) = 4e^{-2nT} u[n] \quad (۷-۱۰۸)$$

و تبدیل  $z$  آن برابر است با

$$H_d(z) = \frac{4}{1 - e^{-2T} z^{-1}} \quad \Re[z] > e^{-2T} \quad (۷-۱۰۹)$$

۷-۶-۲ تبدیل دو جهته

اساس این تبدیل نگاشت از صفحه S به صفحه Z توسط رابطه زیر می باشد.

$$z = \frac{1 + \left(\frac{T}{2}\right)s}{1 - \left(\frac{T}{2}\right)s} \quad (۷-۱۱۰)$$

بنابراین ارتباط سیستم گسسته زمان معادل با سیستم پیوسته زمان متناظر به صورت زیر است.

$$H_d(z) = H_c(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad (۷-۱۱۱)$$

با قرار دادن  $s = \sigma + j\omega$  در رابطه (۷-۱۱۰) داریم.

$$z = \frac{\left[1 + \frac{T}{2}\sigma\right] + j\omega\frac{T}{2}}{\left[1 - \frac{T}{2}\sigma\right] - j\omega\frac{T}{2}} \quad (۷-۱۱۲)$$

بنابراین هنگامی که  $\sigma < 0$  است  $|z|$  کوچکتر از واحد است و نتیجتاً سمت چپ محور  $j\omega$  در صفحه S بداخل دایره واحد نگاشته می شود و به همین ترتیب می توان نشان داد که سمت راست محور  $j\omega$  در صفحه S به خارج دایره واحد نگاشته می شود. اما اگر  $z = e^{j\Omega}$  باشد.

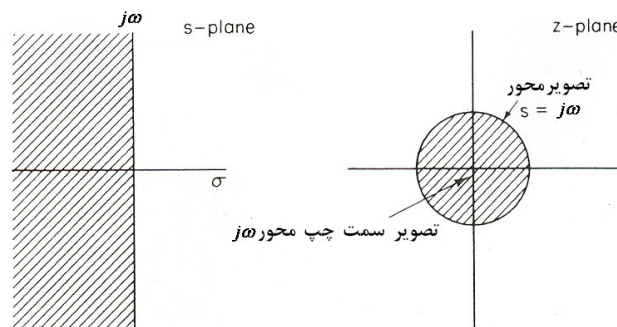
$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 + e^{-j\Omega}} = j \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad (۷-۱۱۳)$$

بنابراین دایره واحد روی محور  $j\omega$  نگاشته می شود. بنابراین توسط تبدیل دوجهته رابط زیر بین فرکانس ها پیوسته و گسسته زمانی وجود دارد.

$$\omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad (۷-۱۱۴)$$

$$\Omega = 2 \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (۷-۱۱۵)$$

خواص نگاشت مذکور در شکل زیر نمایش داده شده است.



شکل (۷-۱۱): نگاشت از صفحه S به صفحه Z توسط رابطه (۷-۱۱۰)

با توجه به اینکه تمام محور  $j\omega$  از  $-\infty$  تا  $\infty$  روی یک دایره از  $\pi - \pi$  تا  $\pi$  نگاشته می شود می توان مطمئن شد که این تبدیل هر گونه تداخلی را از بین می برد. نکته مهمی که باید بدان اشاره کرد این است که با استفاده از تبدیل دوجهته یک سیستم پیوسته زمانی پایدار همواره به یک سیستم پایدار گسسته زمانی تبدیل می شود. مثال (۷-۱۷): سیستم زیر را توسط تبدیل دو جهته به سیستم گسسته زمانی معادل تبدیل کنید.

$$H_c(s) = \frac{4}{s+2} \quad \Re[s] > -2$$

حل: با قراردادن  $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$  در رابطه فوق داریم.

$$\begin{aligned} H_d(z) &= \frac{4}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 2} \\ &= \frac{4T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1}) + 2T(1+z^{-1})} \end{aligned}$$

و یا

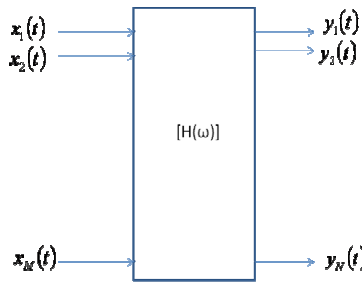
$$\begin{aligned} H_d(z) &= \frac{2T(1+z^{-1})}{(1+T) - (1-T)z^{-1}} \\ &= \frac{\frac{2T}{1+T}(1+z^{-1})}{1 - \frac{1-T}{1+T}z^{-1}} \end{aligned}$$

نهایتاً ناحیه همگرایی بصورت  $|z| > \frac{1-T}{1+T}$  بدست می آید.

## ۷-۷ سیستم های چند ورودی و چند خروجی<sup>۴</sup> (کاربرد الکترومغناطیسی)

سیستم های چند ورودی و چند خروجی مدل مناسبی برای بسیاری از سیستم های کاربردی که در مسائل روزمره با آنها مواجه می شویم هستند. تابع انتقال این سیستم ها بصورت یک ماتریس است. در حالت کلی تعداد ورودیها و خروجیها لازم نیست برابر باشند. یک نمونه سیستم با  $\mathbf{M}$  ورودی و  $\mathbf{N}$  خروجی در شکل زیر نشان داده شده است.

<sup>4</sup> Multi Input- Multi Output



شکل ۷-۱۸ نمایشی از یک سیستم چند ورودی چند خروجی

رابطه ارتباط دهنده بردارهای ورودی و خروجی این سیستم در حوزه زمان به صورت زیر است.

$$[y(t)] = [h(t)] * [x(t)] \quad (۷-۱۱۶)$$

که در آن

$$[x(t)] = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_M(t) \end{bmatrix} \quad (۷-۱۱۷)$$

$$[y(t)] = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{bmatrix} \quad (۷-۱۱۸)$$

$$[h(t)] = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & \dots & h_{1(M-1)}(t) & h_{1M}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & \dots & h_{2(M-1)}(t) & h_{2M}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{(N-1)1}(t) & h_{(N-1)2}(t) & \dots & h_{(N-1)(M-1)}(t) & h_{(N-1)M}(t) \\ h_{N1}(t) & h_{N2}(t) & \dots & h_{N(M-1)}(t) & h_{NM}(t) \end{bmatrix} \quad (۷-۱۱۹)$$

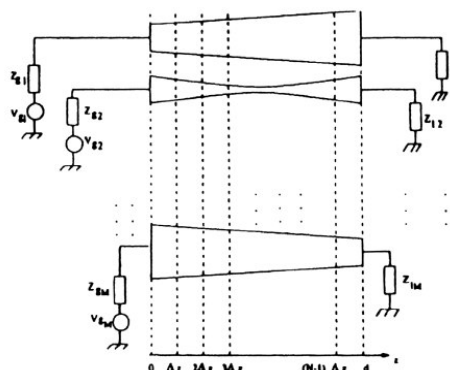
باید توجه داشت که عملیات کانولوشن ماتریسی همانند ضرب ماتریسی تعریف می شود با این تفاوت که به جای ضرب درآیه ها باید آنان را با هم کانوال نمود. مثلاً برای یک سیستم با دو ورودی و دو خروجی داریم.

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}(t) * x_1(t) + h_{12}(t) * x_2(t) \\ h_{21}(t) * x_1(t) + h_{22}(t) * x_2(t) \end{bmatrix} \quad (۱۲۰-۷)$$

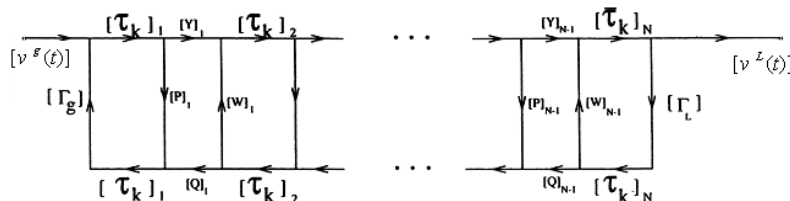
این رابطه در حوزه فرکانس به صورت ضرب ساده ماتریسی تبدیل می شود.

$$[Y(\omega)] = [H(\omega)][X(\omega)] \quad (۱۲۱-۷)$$

یک کاربرد الکترومغناطیسی از این سیستم ها خطوط انتقال تزویج شده غیر یکنواخت می باشد. یک نمونه این خطوط در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل (۱۹-۷) یک سیستم خطوط انتقال تزویج شده به عنوان مثالی از یک سیستم چند ورودی و چند خروجی در مقاله ای که توسط نویسنده به چاپ رسیده است<sup>۵</sup> این سیستم توسط یک سیستم خطی چند ورودی و چند خروجی به صورت شکل زیر مدل شده است.



شکل (۲۰-۷) مدل معادل سیستم نشان داده شده در شکل ۱۹-۷

کلیه پارامترهای این مدل به المانهای سیستم اصلی از جمله ماتریس های اندوکتانس و ظرفیت سیستم اصلی مربوط می شوند. آنچه که در این جا مهم است نحوه ارتباط پارامترهای این مدل به سیستم اصلی نیست (علاقمندان به تفصیل بیشتر در این مورد به مقاله مراجعه نمایند). بلکه آنچه مهم است ارتباط کلی ورودی و خروجی در حوزه لاپلاس یا حوزه فرکانس است. همانگونه که مشاهده می شود ورودی و خروجی سیستم بردار هستند و تابع انتقال سیستم یک ماتریس است. ارتباط بردارهای ورودی و خروجی توسط رابطه زیر بدست می آید.

<sup>5</sup> "Discrete Time Domain Analysis of Nonuniform Lossless Coupled Transmission Lines" Journal of Circuits, Systems, and Computers Vol. 14, No. 5 (2005) 1-14

$$[V^L(s)] = [H^L(s)][V^g(s)] \quad (۱۲۲-۷)$$

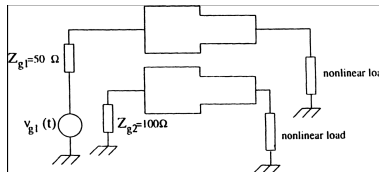
که در آن

$$[V^g(s)] = \mathfrak{S}\{[v^g(t)]\} = \begin{bmatrix} v_{g1}(t) \\ v_{g2}(t) \\ \vdots \\ v_{gM}(t) \end{bmatrix} \quad (۱۲۳-۷)$$

$$[V^L(s)] = \mathfrak{S}\{[v^L(t)]\} = \begin{bmatrix} v_{L1}(t) \\ v_{L2}(t) \\ \vdots \\ v_{LM}(t) \end{bmatrix} \quad (۱۲۴-۷)$$

$$[H^L(s)] = \begin{bmatrix} H_{11}^L(s) & H_{12}^L(s) & \dots & H_{1(M-1)}^L(s) & H_{1M}^L(s) \\ H_{21}^L(s) & H_{22}^L(s) & \dots & H_{2(M-1)}^L(s) & H_{2M}^L(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{(M-1)1}^L(s) & H_{(M-1)2}^L(s) & \dots & H_{(M-1)(M-1)}^L(s) & H_{(M-1)M}^L(s) \\ H_{M1}^L(s) & H_{M2}^L(s) & \dots & H_{M(M-1)}^L(s) & H_{MM}^L(s) \end{bmatrix} \quad (۱۲۵-۷)$$

برای تبدیل این سیستم به یک سیستم گسسته زمان کافی است از تبدیل ضربه استفاده می کنیم. به عنوان مثال برای یک سیستم خطوط انتقال تزویج شده با دو پله به صورت شکل زیر



شکل (۲۱-۷) یک مثال الکترومغناطیسی از سیستم های چند ورودی چند خروجی

و مقادیر اندوکتانس و ظرفیت هر پله به صورت

$$[L]_1 = \begin{bmatrix} 250 & 120 \\ 120 & 347 \end{bmatrix} nH/m,$$

$$[C]_1 = \begin{bmatrix} 205 & -75 \\ -75 & 150 \end{bmatrix} pF/m$$

$$[L]_2 = \begin{bmatrix} 660 & 73 \\ 73 & 490 \end{bmatrix} nH/m,$$

$$[C]_1 = \begin{bmatrix} 65.8 & -5 \\ -5 & 75.8 \end{bmatrix} pF/m.$$

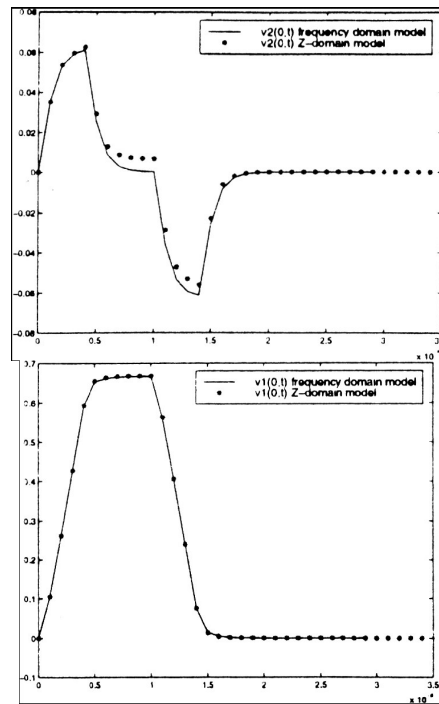
ماتریس تابع انتقال در حوزه گسسته زمان به صورت زیر بدست می آید.

$$H^L(Z) = \frac{\begin{bmatrix} -2.3Z^3 + 0.353Z^2 + 0.026Z & -0.114Z^3 + 0.2Z^2 + 0.009Z \\ -0.435Z^3 + 0.45Z^2 + 0.0122Z & -1.7Z^3 + 0.22Z^2 + 0.004Z \end{bmatrix}}{-3.9Z^4 + 0.99Z^3 + 0.057Z^2 - 0.0007Z + 0.000004}$$

بردار ورودی که در اینجا بردار ولتاژ ورودی است به صورت زیر است.

$$[x(t)] = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

نتیجه محاسبه ولتاژ پایانه ها حاصل از مدل پیوسته و گسسته زمان در شکل های زیر باهم مقایسه شده اند.



شکل ۷-۲۲ مقایسه نتایج حاصل از مدل گسسته زمان با نتایج حاصل از تحلیل پیوسته زمان

دیده می شود که دقت روش گسسته زمان بسیار خوب است و با توجه به سرعت زیاد این روش نسبت به روش پیوسته زمان اهمیت عملی تبدیل سیستم های پیوسته زمان به سیستم های گسسته زمان واضطر می شود. تبدیل سیستم های پیوسته زمان به سیستم های گسسته زمان علاوه بر الکترومغناطیس در رشته های دیگر علوم نیز کاربرد فراوانی دارد.

## ۷-۸ مثالهای حل شده

مثال (۷-۱۸): تبدیل  $Z$  هر یک از دنباله های زیر را بیابید و ناحیه همگرایی را مشخص کنید.

الف)  $\delta[n]$

ب)  $\delta[n+1]$

$$\text{ج) } -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

$$\text{د) } \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u[n]$$

حل:

$$\text{الف) } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1$$

ناحیه همگرایی تمام صفحه Z خواهد بود.

$$\text{ب) } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n+1] z^{-n} = z$$

فقط یک قطب در بینهایت موجود است پس ناحیه همگرایی تمام صفحه Z است.

ج)

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} u[-n-1]$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}$$

$$= -\left(\frac{1}{1-2z} - 1\right) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right)$$

تنها یک قطب در  $z = \frac{1}{2}$  و یک صفر در  $z = 0$  داریم ناحیه همگرایی بصورت زیر است.

$$|z| < \frac{1}{2}$$

د) باتوجه به خطی بودن تبدیل Z می توان تبدیل Z مجموع را به مجموع تبدیل Zها تبدیل کرد.

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

ناحیه همگرایی فصل مشترک دو ناحیه همگرایی است یعنی  $|z| > \frac{1}{2}$ .

مثال (۷-۱۹): تبدیل Z دنباله زیر و ناحیه همگرایی آنرا بیابید.

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \{u[n] - u[n-10]\}$$

حل: چون دنباله فوق یک دنباله دوره محدود است داریم.

$$X(z) = \sum_{n=0}^9 \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^9 \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n$$

باتوجه به اینکه رابطه فوق یک سری هندسی است داریم.

$$X(z) = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

اگر توجه کنیم قطب در  $z = \frac{1}{2}$  توسط صفر در  $z = \frac{1}{2}$  حذف می شود، بنابراین  $X(z)$  هیچ قطبی نخواهد داشت. بنابراین ناحیه همگرایی تمام صفحه Z خواهد بود.  
مثال (۷-۲۰): تبدیل معکوس  $X(z)$  را بیابید اگر  $x[n]$  راسترو باشد.

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{z^{-2} - 3z^{-1} + 2}$$

حل: جهت سادگی فرض می کنیم  $z^{-1} = x$  باشد. در آن صورت می توان  $X(z)$  را به کسور جزئی بر حسب  $x$  تجزیه کرد.

$$\frac{1-2x}{x^2-3x+2} = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x-1)}$$

نتیجتاً

$$a = -3$$

$$b = 1$$

بنابراین

$$X(z) = \frac{-3}{z^{-1}-2} + \frac{1}{z^{-1}-1}$$

و یا

$$X(z) = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

و ناحیه همگرایی باید شامل خارج دایره واحد شود. چون فرض بر این است که  $x[n]$  راسترو است بنابراین ناحیه همگرایی بصورت زیر است.

$$|z| > 1$$

بنابراین

$$x[n] = \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^n - (-1)^n \right] u[n]$$

مثال (۷-۲۱): تبدیل معکوس Z را بیابید اگر

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

و اگر  $x[n]$  راسترو باشد.

حل: بسادگی می توان  $X(z)$  را بصورت زیر نوشت.

$$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

بنابراین با توجه به اینکه  $x[n]$  راسترو است.

$$x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

مثال (۷-۲۲): تبدیل معکوس Z را بیابید اگر

$$X(z) = \log(1 - 2z) \quad |z| < \frac{1}{2}$$

حل: با توجه به ناحیه همگرایی باید سیگنال چپرو باشد. با استفاده از بسط سری توانی داریم.

$$\log(1 - w) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{w^m}{m} \quad |w| < 1$$

بنابراین

$$X(z) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2z)^m}{m} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m}{m} z^m$$

بنابراین

$$x[n] = \frac{2^{-n}}{n} u[-n-1]$$

مثال (۷-۲۳): مطلوبست تبدیل معکوس Z اگر

$$X(z) = \log\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right), \quad |z| > \frac{1}{2}$$

حل: مشابه مثال (۷-۲۲) با استفاده از بسط سری توانی داریم.

$$X(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} z^{-n}$$

بنابراین

$$x[n] = \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} u[n-1]$$

مثال (۷-۲۴): یک دنباله حقیقی مانند  $x[n]$  که دارای تبدیل  $X(z)$  است را در نظر بگیرید و نشان دهید که

$$X(z) = X^*(z^*)$$

حل: از تعریف تبدیل  $Z$  شروع می کنیم.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

نتیجتاً

$$X^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](z^*)^{-n}$$

بنابراین

$$X^*(z^*) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z)$$

مثال (۷-۲۵): دو دنباله  $x_1[n]$  و  $x_2[n]$  توسط رابطه زیر به هم مربوط می شوند.

$$x_2[n] = x_1[-n]$$

مطلوبست رابطه تبدیل  $Z$  دو دنباله

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]z^{-n}$$

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[-n]z^{-n}$$

بنابراین با تغییر متغیر  $m = -n$  در مجموع دوم داریم.

$$X_2(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]z^m$$

بنابراین

$$X_2(z) = X_1(z^{-1})$$

### تمرین های حل نشده

۱. دو دنباله  $x_1[n]$  و  $x_2[n]$  توسط رابطه زیر به هم مربوط می شوند.

$$x_2[n] = (j2)^{n-1} x_1[-n]$$

مطلوبست ارتباط تبدیل  $Z$  دو دنباله.

۲. اگر نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی تبدیل سیگنال  $x_1[n]$  دارای سه قطب در  $z = 0.5$  و

$z = \pm j1.5$  و یک صفر در  $z = -1$  باشد مطلوبست نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی مربوط به

تبدیل  $x_2[n] = (-3)^n x_1[-n]$ .

۳. چگونه می توان از فقط محل صفر و قطب ها ی یک تبدیل به حقیقی بودن سیگنال در حوزه زمان

پی برد.

۴. تبدیل Z دنباله های زیر را بگیرد.

$$x[n] = (1/2)^{2n} \cos(2n)u[n]$$

$$x[n] = (1/8)^{2n} (2n)u[n]$$

$$x[n] = (1/4)^n \{u[n] - u[n-100]\}$$

۵. تبدیل معکوس Z بگیرد.

$$X(z) = \frac{z-0.5}{(z+0.5)^2} \quad |z| > 0.5$$

$$X(z) = \log[z(z-0.25)] \quad |z| > 0.25$$

$$(z) = \frac{2z-0.5}{(z/2-0.5)^2} \quad |z| > 1$$

۶. تمام سیگنالهای  $x_1[n]$  ممکن برای نمودار صفر و قطبی که در سوال دوم مطرح شده است را بنویسید.

۷. تبدیل معکوس  $X(z)$  را بیابید اگر  $x[n]$  راسترو باشد و

$$X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{z^{-2}-z^{-1}+1}$$

۸. اگر

$$\varphi_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]x[n+k]$$

مطلوبست تبدیل Z سیگنال  $\varphi_{xx}[n]$ .

۹. مطلوبست تبدیل Z سیگنال های زیر بر حسب تبدیل Z دنباله  $x[n]$ .

$$y[n] = \begin{cases} x[n/2] & n, \text{even} \\ 0 & n, \text{odd} \end{cases}$$

$$y[n] = x[2n]$$

۱۰. یک دنباله راست رو دارای تبدیل Z زیر است.

$$X(z) = \frac{3z^{-10} + z^{-7} - 5z^{-2} + 4z^{-1} + 1}{z^{-10} - 5z^{-7} + z^{-3}}$$

مطلوبست  $x[n]$  برای  $n > 0$ .

۱۱.  $H(z)$  مبین تابع انتقال یک سیستم علی و پایدار غیر همانی است ( $H(z) \neq 1$ ). ورودی این سیستم شامل چهار عبارت است. یکی از آنها یک ضربه و دیگری یک نمایی مختلط به صورت  $(r_0 e^{j\Omega_0})^n$  و  $r_0$  و  $\Omega_0$  اعداد ثابت حقیقی غیر صفر هستند) است. اما از جملات سوم و چهارم ورودی اطلاعاتی در دست نداریم. شکل کلی ورودی به صورت زیر است.

$$x[n] = \delta[n] + (r_0 e^{j\Omega_0})^n + f_1[n] + f_2[n]$$

که در آن  $f_1[n]$  و  $f_2[n]$  توابع مجهولی هستند که باید تعیین شوند. خروجی این سیستم به ورودی فوق الذکر برابر است با

$$y[n] = -6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + k_1 e^{4n} \cos[3n] - k_2 e^{4n} \sin[3n] + \delta[n] + 7\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

که در آن  $k_1$  و  $k_2$  ضرایب مجهول با دامنه غیر واحد ( $|k_1| \neq 1, |k_2| \neq 1$ ) هستند که باید تعیین شوند. مطلوبست تعیین دقیق ورودی، ضرایب مجهول خروجی و  $H(z)$ .

۱۲. دنباله های  $x[n]$  و  $y[n]$  با تبدیلات  $\mathbf{Z}$  و نواحی همگرایی داده شده مفروضند.

$$X(z); \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$

$$Y(z); \quad R_{y^-} < |z| < R_{y^+}$$

مطلوبست تبدیل  $\mathbf{Z}$  و ناحیه همگرایی سیگنال  $r[n] = x[n]y[n]$  برحسب تبدیلات و نواحی همگرایی داده شده برای  $y[n]$  و  $x[n]$ .