

فصل ششم

تبدیل لاپلاس

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

مقدمه

در فصول قبلی توانایی فوق العاده تبدیل فوری در تجزیه و تحلیل سیستم‌های خطی را مشاهده کردیم. این توانایی از آنجا ناشی می‌شود که بسیاری از سیگنال‌ها را می‌توان بصورت ترکیب خطی از توابع نمایی موهومی نوشت و چون توابع ویژه سیستم‌ها نیز بصورت نمایی موهومی بودند، بسادگی توانستیم پاسخ به هر ورودی را بدست آوریم. اما برخی سیگنال‌ها را نمی‌توان بر حسب توابع نمایی موهومی نوشت. در این فصل با معرفی تبدیل لاپلاس، که حالت کلی تر تبدیل فوری است، می‌خواهیم بسط جدید سیگنال دلخواه را بر حسب توابع ویژه سیستم‌های LTI (توابع نمایی مختلط) ارائه کنیم.

۶-۱ تبدیل لاپلاس

برای یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ ، دیدیم که پاسخ $y(t)$ سیستم، به ورودی نمایی مختلط e^{st} ، چنین می‌شود.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau} h(\tau) d\tau = H(s) e^{st} \quad (1-6)$$

که در آن

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau} h(\tau) d\tau \quad (2-6)$$

اگر $s = j\omega$ موهومی محض بود، انتگرال معادله (۲-۶) همان تبدیل فوری $h(t)$ بود. اما در حالت عمومی که s عدد مختلط است انتگرال (۲-۶) را تبدیل لاپلاس $h(t)$ می‌نامند، که مانند تبدیل فوری نقش مهمی در تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌های LTI دارد. در حالت کلی تبدیل لاپلاس سیگنال دلخواه $x(t)$ چنین تعریف می‌شود.

$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (3-6)$$

که $s = \sigma + j\omega$ در حالت کلی یک عدد مختلط است. انتگرال (۳-۶) همانگونه که مشاهده می‌شود تابعی از s است. گاهی اپراتور ℓ را در مورد تبدیل لاپلاس بکار می‌برند و چنین نمایش می‌دهند.

$$x(t) \xrightarrow{\ell} X(s)$$

هنگامی که $s = j\omega$ باشد معادله (۳-۶) به رابطه زیر تبدیل می‌شود.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4-6)$$

این همان تبدیل فوری $x(t)$ است که بصورت $X(\omega)$ قبلاً نشان داده شد. بنابراین تبدیل لاپلاس $x(t)$ وقتی که $s = j\omega$ باشد مساوی تبدیل فوری $x(t)$ خواهد بود.

$$X(s) \Big|_{s=j\omega} = \Im\{x(t)\} = X(\omega) \quad (5-6)$$

ارتباط جالب دیگری میان تبدیل لاپلاس و تبدیل فوری وجود دارد که اگر معادله (۳-۶) را بصورت معادله (۶-۶) بنویسیم، می‌توان این ارتباط را پیدا کرد.

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \quad (6-6)$$

فصل ششم: تبدیل لاپلاس

یا

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t} dt \quad (7-6)$$

بنابراین می توان $X(s)$ را تبدیل فوریه $x(t)e^{-\sigma t}$ دانست. این حقیقت حاوی نتایج ارزنده ای است. از جمله اینکه تبدیل لاپلاس حالت عمومی تر تبدیل فوریه است. بدین مفهوم که می توان سیگنالهایی را یافت که تبدیل فوریه ندارند اما تبدیل لاپلاس دارند. برای درک بهتر به مثال زیر توجه کنید. مثال (۶-۱): سیگنال $x(t) = e^{-at}u(t)$ را در نظر بگیرید. تبدیل فوریه این سیگنال وقتی $a > 0$ است بسادگی قابل محاسبه است.

$$X(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega + a} \quad a > 0 \quad (8-6)$$

و از معادله (۶-۳) داریم.

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}e^{-st}u(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t} dt \end{aligned} \quad (9-6) \quad (10-6)$$

با قرار دادن $s = \sigma + j\omega$ داریم.

$$X(\sigma + j\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma+a)t}e^{-j\omega t} dt \quad (11-6)$$

با مقایسه معادله (۸-۶) با معادله (۱۱-۶) پی می بریم که معادله (۹-۶) تبدیل فوریه $e^{-(\sigma+a)t}u(t)$ می باشد. بنابراین داریم.

$$X(\sigma + j\omega) = \frac{1}{(\sigma + a) + j\omega} \quad (\sigma + a) > 0 \quad (12-6)$$

یا بطور معادل

$$X(s) = \frac{1}{s + a} \quad \Re\{s\} > -a \quad (13-6)$$

به عنوان مثال برای $a = 0$ ، $x(t)$ تابع پله واحد خواهد بود که تبدیل لاپلاس آن $X(s) = \frac{1}{s}$ است، البته با شرط $\Re\{s\} > 0$.

باید توجه کرد که تبدیل لاپلاس ممکن است برای بعضی از مقادیر σ همگرا باشد و برای برخی دیگر واگرا. در مثال (۶-۱) تبدیل لاپلاس برای $\Re\{s\} = \sigma > -a$ همگرا است، و اگر a مثبت باشد در اینصورت $X(s)$ بازاء برخی مقادیر منفی نیز همگرا است. بنابراین تبدیل لاپلاس در $\sigma = 0$ نیز همگرا خواهد شد. در اینصورت تبدیل لاپلاس به تبدیل فوریه تبدیل می شود.

$$X(0 + j\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \quad (14-6)$$

اما اگر a منفی یا صفر باشد در این صورت اگر چه تبدیل لاپلاس وجود دارد ولی تبدیل فوریه وجود ندارد. چون ناحیه همگرایی شامل $\sigma = 0$ نخواهد شد.

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

مثال (۶-۲): درمقایسه با مثال قبلی اکنون فرض کنید.

$$x(t) = -e^{-at} u(-t) \quad (۶-۱۵)$$

بنابراین

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} e^{-st} u(-t) dt = -\int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t} dt \quad (۶-۱۶)$$

و یا

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \left(1 - e^{-(s+a)t} \right) \Big|_{t \rightarrow -\infty} \quad (۶-۱۷)$$

در این مثال برای همگرا شدن تبدیل لاپلاس باید $\Re\{s+a\} < 0$ شود، یا

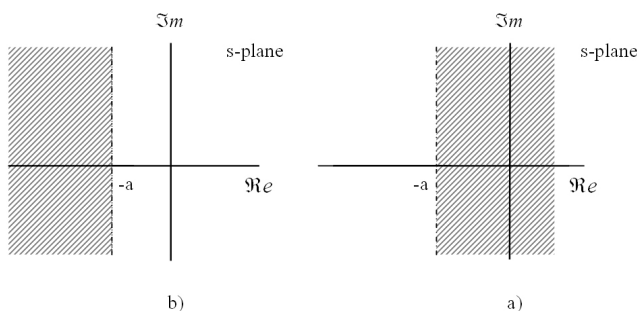
$$\Re\{s\} < -a \quad (۶-۱۸)$$

بنابراین

$$-e^{-at} u(-t) \xrightarrow{\ell} \frac{1}{s+a} \quad \Re\{s\} < -a \quad (۶-۱۹)$$

عبارت جبری تبدیل لاپلاس در هر دو مثال (۶-۱) و (۶-۲) یکی است. اما مقادیری که s می‌تواند اختیار کند تا آن دو عبارت صادق باشند متفاوت است. در مثال اول محدوده تغییرات s توسط $\Re\{s\} > -a$ تعیین می‌شود و در مثال دوم محدوده تغییرات s توسط $\Re\{s\} < -a$ تعیین می‌شود.

بنابراین برای یکتا بودن تبدیل لاپلاس سیگنال‌ها، باید علاوه بر عبارت جبری تبدیل لاپلاس، محدوده همگرا بودن را نیز مشخص کرد. به این محدوده ناحیه همگرایی^۱ می‌گویند و با علامت مختصر ROC نمایش داده می‌شود. بنابراین ROC شامل مقادیری از $s = \sigma + j\omega$ است که برای آنها تبدیل فوریه $x(t)e^{-\sigma t}$ همگرا است. بدین ترتیب تبدیل های لاپلاس (۶-۱۳) و (۶-۱۹) هر یک نمایانگر یک سیگنال کاملاً مشخص و مجزا می‌باشند، چون اگر چه عبارت‌های جبری یکی می‌باشند ولی ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس‌ها متفاوت است. روش مناسب نمایش ROC در شکل (۶-۱) نمایش داده شده است.



شکل (۶-۱): (a) ROC مربوط به مثال (۶-۱) (b) ROC مربوط به مثال (۶-۲)

^۱ Region of Convergence

فصل ششم: تبدیل لاپلاس

متغیر 's' یک عدد مختلط است و در شکل (۱-۶)، صفحه مختلط یا صفحه s^۱ نمایش داده شده است. در صفحه مختلط، $\Re\{s\}$ روی محور افقی و $\Im\{s\}$ روی محور عمودی اختیار می شود. گاهی به این دو محور، محور σ و محور $j\omega$ نیز گفته می شود. ناحیه هاشور خورده در شکل (۱-۶-۱) نمایانگر مجموعه نقاطی در صفحه s است که در آنها عبارت (۱۳-۶) همگرا است. پس در واقع نمایانگر ناحیه همگرایی مثال (۱-۶) است و ناحیه هاشور خورده در شکل (۱-۶-۲) ناحیه همگرایی مثال (۲-۶) را نمایش می دهد.

مثال (۳-۶): فرض کنید.

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) \quad (۲۰-۶)$$

عبارت جبری تبدیل لاپلاس چنین است.

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)]e^{-st}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}e^{-st}u(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t}e^{-st}u(t)dt \end{aligned} \quad (۲۱-۶)$$

اگر در عبارت اول $s > -1$ و در عبارت دوم $s > -2$ در نظر گرفته شود به نتیجه زیر می رسیم.

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \quad (۲۲-۶)$$

برای تعیین ROC چون $x(t)$ مجموع دو تابع نمایی حقیقی است و چون همانطور که نشان خواهیم داد اپراتور تبدیل لاپلاس خطی است، بنابراین $X(s)$ مجموع تبدیل لاپلاس هریک از توابع نمایی است. عبارت اول، تبدیل لاپلاس $e^{-t}u(t)$ و عبارت دوم تبدیل لاپلاس $e^{-2t}u(t)$ است. از مثال (۱-۶) می توان ROC را برای هر یک از این توابع بدست آورد.

$$e^{-t}u(t) \xrightarrow{\ell} \frac{1}{s+1} \quad \Re\{s\} > -1 \quad (۲۳-۶)$$

$$e^{-2t}u(t) \xrightarrow{\ell} \frac{1}{s+2} \quad \Re\{s\} > -2 \quad (۲۴-۶)$$

بنابراین مجموع مقادیری از $\Re\{s\}$ که بازاء آنها تبدیل لاپلاس نمایی همگراست عبارت است از فصل مشترک نواحی همگرایی فوق الذکر و یا

$$x(t) \xrightarrow{\ell} \frac{2s+3}{s^2+3s+2} \quad \Re\{s\} > -1 \quad (۲۵-۶)$$

هنگامی که بتوان $X(s)$ را بصورت $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ نوشت، به آن کسری^۲ گفته می شود. $X(s)$ همواره

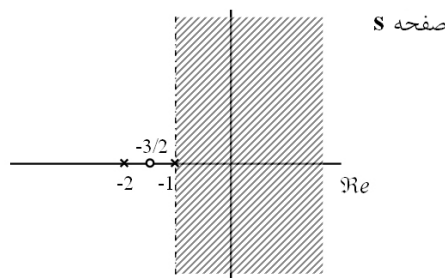
کسری است اگر $x(t)$ ترکیب خطی از توابع نمایی حقیقی باشد. در قسمت های بعدی خواهیم دید سیستم های LTI که بوسیله معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت مشخص می شوند نیز دارای تابع

^۱ S-Plane

^۲ Rational

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

تبدیل $H(s)$ بصورت کسری هستند. ریشه‌های $N(s)$ را صفرها^۱ و ریشه‌های $D(s)$ را قطب‌های^۲ تبدیل می‌نامند و معمولاً در رسم ROC این نقاط نیز مشخص می‌شوند. مثلاً برای مثال (۳-۶) رسم ROC بصورت شکل (۲-۶) است.



شکل (۲-۶): نمودار صفر و قطب و ROC برای مثال (۳-۶)

علامت 'x' جهت نمایش قطب و علامت 'o' جهت نمایش صفر بکار گرفته شده‌اند. مثال (۴-۶): فرض کنید.

$$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t) \quad (۲۷-۶)$$

تبدیل لاپلاس $\delta(t)$ مساوی واحد است و تبدیل لاپلاس سایر سیگنال‌ها بسادگی بدست می‌آید. بنابراین

$$X(s) = 1 - \frac{4}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{s-2} \quad \Re\{s\} > 2 \quad (۲۸-۶)$$

ناحیه همگرایی از فصل مشترک تک تک نواحی همگرایی بدست می‌آید. توجه شود که ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس تابع ضربه، تمام صفحه s می‌باشد. رابطه (۲۸-۶) را می‌توان بدین صورت نیز نوشت.

$$X(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)} \quad \Re\{s\} > 2 \quad (۲۹-۶)$$

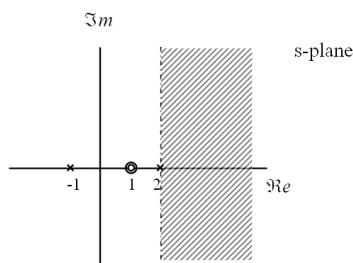
رسم صفر و قطب و ROC برای $X(s)$ بصورت شکل (۳-۶) می‌باشد.

همانطور که گفتیم تبدیل لاپلاس با $s = j\omega$ همان تبدیل فوریه است. هنگامی که ROC شامل محور $j\omega$ نشود ($\Re\{s\} = 0$) جزو ناحیه همگرایی نباشد در اینصورت تبدیل فوریه سیگنال وجود ندارد. نکته دیگری که به آن باید اشاره کرد در مورد صفرها و قطب‌های مرتبه بالاتر است. همانگونه که از شکل (۳-۶) پیداست دو صفر در یک نقطه واقع می‌شود که به آنها صفر مرتبه دوم می‌گویند.

¹ Zeroes

² Poles

فصل ششم: تبدیل لاپلاس



شکل (۳-۶): نمودار صفر - قطب و ناحیه همگرایی رابطه (۲۹-۶)

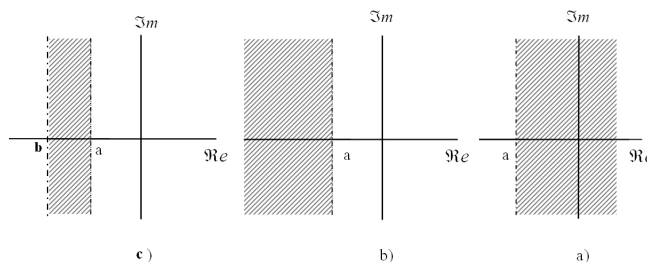
در این مثال دو قطب در $s = -1$ و $s = 2$ داریم ولی ROC در سمت راست بزرگترین قطب قرار گرفته است. برای تبدیل لاپلاس های کسری ارتباط نزدیکی میان محل قطب ها و ROC وجود دارد و بطوری که بعداً خواهیم دید می توان فقط با مشاهده مکان قطب ها ROC را مشخص کرد.

۲-۶ خواص ناحیه همگرایی برای تبدیلات لاپلاس

در قسمت قبل دیدیم که تعریف کامل تبدیل لاپلاس، نه تنها شامل عبارت جبری است بلکه احتیاج به مشخص کردن ناحیه همگرایی نیز دارد. ناحیه همگرایی دارای خواصی است که با شناخت این خواص می توان ناحیه همگرایی را فقط با دانستن عبارت جبری $X(s)$ و دانستن اطلاعات اندکی در مورد شکل $x(t)$ در حوزه زمان بدست آورد. هم اکنون این خواص را مورد بررسی قرار می دهیم.

خاصیت ۱: ناحیه همگرایی $X(s)$ شامل قطعات موازی با محور $j\omega$ در صفحه s است.

از آنجا به صحت این خاصیت پی برده می شود که ناحیه همگرایی $X(s)$ شامل آن مقادیری از $s = \sigma + j\omega$ است که بازه آنها تبدیل فوریه $x(t) = e^{-\sigma t}$ همگرا شود. پس ناحیه همگرایی فقط به مقدار حقیقی s بستگی دارد و مستقل از مقدار موهومی آن است. بنابراین ROC فقط توسط خطوطی به موازات محور $j\omega$ محدود می شود. بنابراین ROC در حالت کلی به یکی از سه صورت زیر است.



شکل (۴-۶) (a) ناحیه همگرایی راسترو (b) ناحیه همگرایی چپرو (c) ناحیه همگرایی محدود

خاصیت ۲: ناحیه همگرایی شامل قطب ها نمی شود.

این مطلب در سه مثال مطرح شده بوضوح دیده می شود و در حالت کلی نیاز به توضیح اضافی ندارد.

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

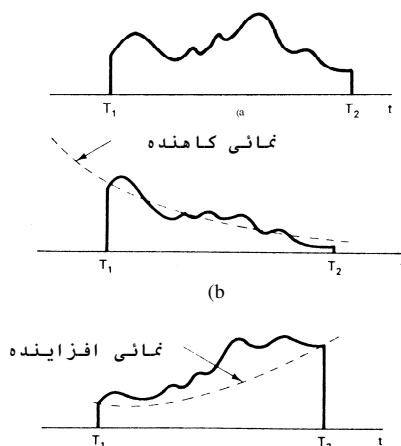
خاصیت ۳: اگر $x(t)$ در حوزه زمان محدود (دوره محدود) باشد و اگر حداقل یک مقدار از s موجود باشد بقسمی که بازاء آن s ، تبدیل لاپلاس همگرا باشد در آن صورت ناحیه همگرایی شامل تمام صفحه s خواهد بود. خاصیت سوم بدین صورت ثابت می‌شود.

یک سیگنال زمان محدود دارای این خاصیت است که در خارج یک ناحیه صفر و در داخل آن غیر صفر است (به شکل (۵-۶) توجه کنید).

فرض کنید که $x(t)e^{-\sigma t}$ بطور مطلق بازاء مقادیری از σ مثلاً σ_0 انتگرال پذیر باشد.

بنابراین

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \quad (۳۰-۶)$$



شکل (۵-۶): (a) سیگنال با دوره محدود (b) سیگنال دوره N در یک نمایی کاهنده ضرب شده است. (c) سیگنال دوره محدود N در یک نمایی افزایشنده ضرب شده است

در این حالت $\Re\{s\} = \sigma_0$ در ناحیه همگرایی قرار دارد. برای اینکه $\Re\{s\} = \sigma_1$ هم در ناحیه همگرایی باشد باید

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt = \int_{T_1}^{T_0} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} dt < \infty \quad (۳۱-۶)$$

اکنون فرض کنید $\sigma_0 < \sigma_1$ باشد، بگونه‌ای که $e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t}$ بیانگر یک تابع نمایی کاهنده باشد. بنابراین در فاصله‌ای که $x(t)$ وجود دارد، ماکزیمم مقدار تابع نمایی مساوی $e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_1}$ است و می‌توانیم بنویسیم:

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_1} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt \quad (۳۴-۶)$$

با توجه به اینکه انتگرال سمت راست محدود است متوجه می‌شویم که صفحه s بازاء $\sigma_0 < \Re\{s\}$ نیز جزو ناحیه همگرایی است. با روشی مشابه اگر $\sigma_0 > \sigma_1$ باشد آنگاه

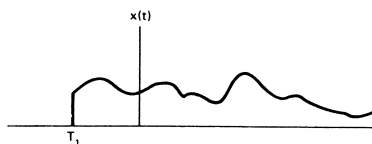
¹ Finite Duration

فصل ششم: تبدیل لاپلاس

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < e^{-(\sigma_1 - \sigma_0) T_2} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt \quad (35-6)$$

و دوباره پی می‌بریم که $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ به ازاء $\Re\{s\} < \sigma_0$ بطور مطلق انتگرالپذیر است. بنابراین ناحیه همگرایی شامل همه صفحه s خواهد بود. این نتایج در شکل (5-6-b) و (5-6-c) نمایش داده شده است. در شکل (5-6-b) حاصل ضرب سیگنال شکل (5-6-a) را در نمایی کاهنده مشاهده می‌کنیم و در شکل (5-6-c)، حاصل ضرب همان سیگنال را در نمایی افزایشی می‌بینیم. چون ناحیه وجود $x(t)$ محدود است رشد تابع نمایی در این فاصله هرگز نامحدود نخواهد بود و بنابراین انتگرال‌پذیری $x(t)$ با ضرب کردن در تابع نمایی (چه کاهنده و چه افزایشی) خدشه‌دار نخواهد شد (البته اگر خود $x(t)$ انتگرال‌پذیر باشد).

توجه به این نکته حائز اهمیت است که اطمینان از محدود بودن رشد توابع نمایی از آنجا ناشی می‌شود که فاصله وجود $x(t)$ محدود است و اگر چنین نباشد در خاصیت بعدی به آن اشاره می‌شود. خاصیت 4: اگر $x(t)$ راست رو¹ (سیگنالی را راست‌رو می‌گویند که از سمت چپ محدود باشد یعنی بازاء مقادیر $t < T_1$ مساوی صفر باشد) باشد و اگر خط $\Re\{s\} = \sigma_0$ در ناحیه همگرایی باشد در آنصورت تمام مقادیر s که بازاء آنها $\Re\{s\} > \sigma_0$ می‌شود، نیز در ناحیه همگرایی قرار می‌گیرند. در شکل (6-6) یک سیگنال راست‌رو مشاهده می‌شود. البته ممکن است برای چنین سیگنالی نتوان ناحیه همگرایی تعریف کرد. یعنی ممکن است هیچ مقدار s ای را نتوان یافت که بازاء آن تبدیل لاپلاس همگرا شود.



شکل (6-6): سیگنال راست‌رو

یک مثال از این نوع تابع $x(t) = e^{t^2} u(t)$ است. اما موقتاً فرض کنید که تبدیل لاپلاس بازاء مقدار مشخصی از σ همگرا باشد که ما با σ_0 آنرا نمایش می‌دهیم، بنابراین

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \quad (36-6)$$

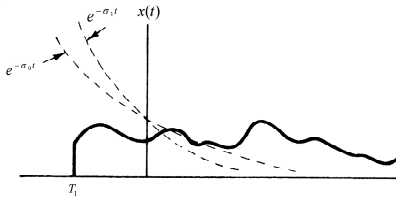
یا بطور معادل چون $x(t)$ راست‌رو است.

$$\int_{T_1}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \quad (37-6)$$

بنابراین اگر $\sigma_1 > \sigma_0$ باشد بازهم می‌توان گفت که $|x(t)|e^{-\sigma_1 t}$ بطور مطلق انتگرال‌پذیر است، چون با افزایش t (یا $t \rightarrow \infty$)، $e^{-\sigma_1 t}$ با سرعت بیشتری نسبت به $e^{-\sigma_0 t}$ کاهش می‌یابد که در شکل (6-7) نمایش داده شده است.

¹ Right-sided

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها



شکل (۶-۷): اگر $x(t)$ راست‌رو و $x(t)e^{-\sigma_0 t}$ بطور مطلق انتگرال پذیر باشند، در آنصورت $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ با شرط $\sigma_1 > \sigma_0$ انتگرال پذیر است.

همچنین می توان نوشت.

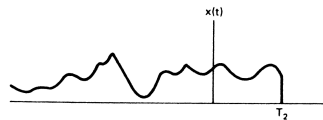
$$\int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt = \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t - (\sigma_1 - \sigma_0)t} dt \quad (6-38)$$

$$\leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_1} \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt$$

چون T_1 محدود است، از معادله (۶-۳۷) متوجه می شویم که سمت راست نامعادله (۶-۳۸) محدود است و بنابراین $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ بطور مطلق انتگرال پذیر است. توجه کنید که چون $x(t)$ راست‌رو است و چون $\sigma_1 > \sigma_0$ است سرعت سقوط $e^{-\sigma_1 t}$ بیشتر از $e^{-\sigma_0 t}$ است و بنابراین $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ نمی تواند بدون محدودیت در ناحیه t های منفی رشد کند چون $x(t)$ بازاء $t < T_1$ مساوی صفر است.

خاصیت ۵: اگر $x(t)$ سیگنال چپ‌رو^۱ باشد و اگر خط $\Re\{s\} = \sigma_0$ در ناحیه همگرایی باشد، تمام مقادیر s که بازاء آنها $\Re\{s\} < \sigma_0$ است نیز در ناحیه همگرایی قرار می گیرند.

یک سیگنال چپ‌رو سیگنالی است که بازاء زمان های بزرگتر از یک مقدار محدود T_2 ، صفر باشد (به شکل (۶-۸) توجه کنید). اثبات این خاصیت مثل اثبات خاصیت ۴ است.



شکل (۶-۸): سیگنال چپ‌رو

خاصیت ۶: اگر $x(t)$ دو جهته^۲ باشد و اگر خط $\Re\{s\} = \sigma_0$ در ناحیه همگرایی باشد، ناحیه شامل یک قطعه موازی محور $j\omega$ در صفحه s است بگونه ای که شامل $\Re\{s\} = \sigma_0$ می شود.

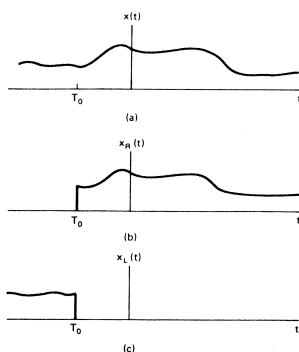
یک سیگنال دوجهته سیگنالی است که از هر دو طرف در حوزه زمان امتداد داشته باشد (به شکل (۶-۹) توجه کنید). برای تعیین ناحیه همگرایی چنین سیگنالی می توان با انتخاب یک لحظه دلخواه از زمان مانند T_0 سیگنال را به مجموع دو سیگنال چپ‌رو $x_L(t)$ و راست‌رو $x_R(t)$ تجزیه کرد، همانگونه که در شکل (۶-۹) نشان داده شده است.

تبدیل لاپلاس $x(t)$ بازاء مقادیری از s همگراست که در آن ناحیه هر دو سیگنال $x_L(t)$ و $x_R(t)$ همگرا باشند.

¹ Left-sided

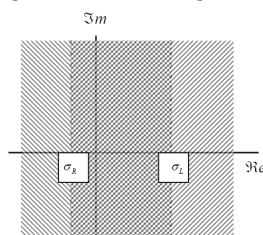
² Two-sided

فصل ششم: تبدیل لاپلاس



شکل (۶-۹): سیگنال دو جهته که به دو سیگنال چپرو و راسترو تجزیه شده است.

از خاصیت ۴ می دانیم که ناحیه همگرایی $\ell\{x_R(t)\}$ شامل نقاطی از صفحه S است که در آنها $\Re\{s\} > \sigma_R$ می باشد (بازاء مقدار معینی از σ_R). یعنی شامل سمت راست یک مقدار معین مثل σ_R است. و از خاصیت ۵ هم می دانیم که ناحیه همگرایی $\ell\{x_L(t)\}$ شامل نقاطی از صفحه S است که در آنها $\Re\{s\} < \sigma_L$ است (σ_L عدد معینی است). بنابراین اگر بدانیم تبدیل لاپلاس بازاء یک خط مشخص مثل $\Re\{s\} = \sigma_0$ همگراست. پس حتماً این دو ناحیه (یعنی $\Re\{s\} < \sigma_L$ و $\Re\{s\} > \sigma_R$) دارای حداقل یک خط مشترک یا یک قطعه مشترک می باشند [ر.ک. به شکل (۶-۱۰)]



شکل (۶-۱۰): نواحی همگرایی مربوط به $x_R(t)$ و $x_L(t)$ که طبق فرض در یک ناحیه مشترک هستند. ناحیه مشترک نواحی همگرایی در واقع ناحیه همگرایی مربوط به $x(t) = x_R(t) + x_L(t)$ می باشد. اما ممکن است که $\sigma_R > \sigma_L$ شود. در این صورت ناحیه مشترک وجود نخواهد داشت و تبدیل لاپلاس بازاء هیچ مقداری از S همگرا نخواهد شد. مثال (۶-۵): فرض کنید.

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & 0 < t < T \\ 0 & t < 0, T < t \end{cases} \quad (۶-۳۹)$$

تبدیل لاپلاس آن بصورت زیر است.

$$X(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a} [1 - e^{-(s+a)T}] \quad (۶-۴۰)$$

چون در این مثال $x(t)$ دارای طول محدود است، از خاصیت (۳) متوجه می شویم که ناحیه همگرایی شامل تمام صفحه S است.

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

$x(t)$ دارای تعداد نامتناهی صفر است که بازاء آنها $1 - e^{-(s+a)T} = 0$ می شود.

بنابراین

$$e^{-(s+a)T} = 1 = e^{-j2k\pi} \quad (۴۱-۶)$$

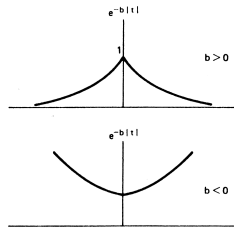
$$(s+a)T = j2k\pi \quad (۴۲-۶)$$

$$s = -a + j \frac{2\pi k}{T} \quad \text{و} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۴۳-۶)$$

تمرین ۶-۱: محل این صفرها را در صفحه s مشخص کنید.

مثال (۶-۶): فرض کنید سیگنال ۴۴-۶ را داشته باشیم

$$x(t) = e^{-b|t|} \quad (۴۴-۶)$$



شکل (۶-۱۱): سیگنال $x(t) = e^{-b|t|}$ بازاء $b > 0$ و $b < 0$

در شکل (۶-۱۱) این سیگنال بازاء $b > 0$ و $b < 0$ رسم شده است.

چون سیگنال دو طرفه یا دو جهته است باید آنرا به دو سیگنال راست‌رو و چپ‌رو تجزیه کرد. یعنی

$$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{bt}u(-t) \quad (۴۵-۶)$$

اما قبلاً داشتیم که

$$e^{-bt}u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+b} \quad \text{و} \quad \Re\{s\} > -b \quad (۴۶-۶)$$

$$e^{bt}u(-t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{-1}{s-b} \quad \text{و} \quad \Re\{s\} < b \quad (۴۷-۶)$$

اگر چه تبدیل لاپلاس هر دو قسمت سیگنال موجود است (یعنی ناحیه همگرایی دارند)، ولی اگر $b < 0$ باشد، این دو ناحیه همگرایی نقاط مشترک ندارند. بنابراین $x(t)$ تبدیل لاپلاس نخواهد داشت. اما اگر $b > 0$ باشد، تبدیل لاپلاس چنین است.

$$X(s) = \frac{-2b}{(s-b)^2} \quad -b < \Re\{s\} < b \quad (۴۸-۶)$$

تمرین: رابطه فوق را ثابت کنید.

توجه کنید که هر سیگنال خواه تبدیل لاپلاس داشته باشد یا نداشته باشد در یکی از چهار طبقه سیگنال‌هایی که معرفی کردیم قرار خواهد گرفت (سیگنال زمان محدود، راست‌رو، چپ‌رو، دو طرفه). بنابراین هر سیگنالی که تبدیل لاپلاس دارد باید ناحیه همگرایی‌اش در یکی از چهار ناحیه زیر قرار بگیرد.

فصل ششم: تبدیل لاپلاس

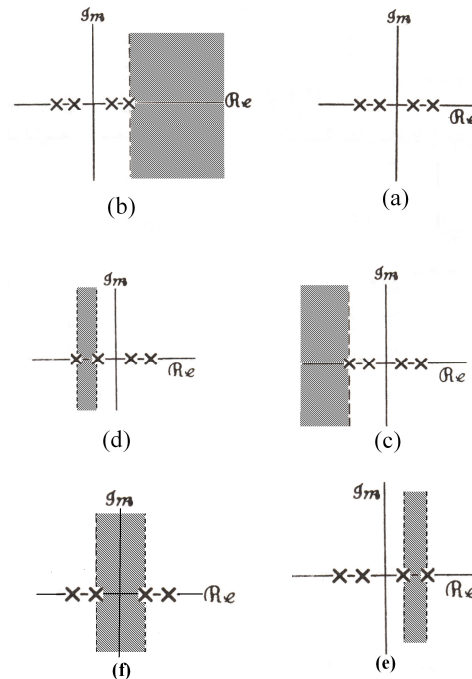
تمام صفحه S	(برای سیگنال های زمان محدود)
سمت چپ صفحه S	(برای سیگنال های چپ پرو)
سمت راست صفحه S	(برای سیگنال های راست پرو)
محدود به دو خط موازی محور $j\omega$ در صفحه S	(برای سیگنال های دو طرفه)

در تمامی حالات ناحیه همگرایی از یک قطب شروع می شود و به یک قطب دیگر یا بینهایت ختم می شود ولی هرگز شامل قطب ها نمی شود. بنابراین برای سیگنال راست پروئی که شامل چند قطب است، ناحیه همگرایی از بزرگترین قطب (آخرین قطب در سمت راست) شروع شده و به $(+\infty)$ ختم می شود. و برای سیگنال چپ پروئی که شامل چند قطب است ناحیه همگرایی از کوچکترین قطب (آخرین قطب در سمت چپ) شروع شده و به بینهایت منفی $(-\infty)$ ختم می شود.

مثال (۶-۷): عبارت جبری زیر را با نمودار صفر-قطب شکل (۶-۱۲a) در نظر بگیرید.

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)(s-2)} \quad (۶-۴۹)$$

همانطور که در شکل (۶-۱۲) نمایش داده شده است پنج (تعداد قطب ها +۱) ناحیه همگرایی برای عبارت فوق ممکن است. اگر سیگنال مربوط به نمودار صفر-قطب فوق، راست پرو باشد شکل (۶-۱۲b) ناحیه همگرایی آن خواهد بود.

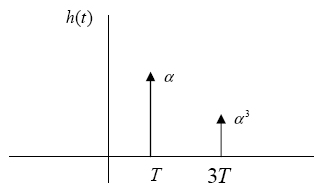


شکل (۶-۱۲): نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی ممکنه برای مثال (۶-۷)

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

اما اگر سیگنال مذکور چپ‌رو باشد شکل (c-۱۲-۶) نمایش ناحیه همگرایی خواهد بود. همچنین اگر سیگنال $x(t)$ دو طرفه باشد یکی از شکل‌های (e,f,d-۱۲-۶) نمایش ناحیه همگرایی آن است. در حالتی که ناحیه همگرایی شکل (f-۱۲-۶) باشد تبدیل فوری وجود دارد چون ناحیه همگرایی شامل محور $j\omega$ می‌شود. برای بقیه حالتها تبدیل فوری وجود ندارد. مثال (۸-۶): تبدیل لاپلاس سیگنال زیر را بدست آورید.

$$h(t) = \alpha\delta(t-T) + \alpha^3\delta(t-3T) \quad (۵۰-۶)$$



شکل (۱۳-۶): سیگنال $h(t)$ مربوط به مثال (۸-۶)

تبدیل لاپلاس عبارت اول برابر است با

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha\delta(t-T)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-sT} \delta(t-T) dt = \alpha e^{-sT} \quad (۵۱-۶)$$

تبدیل لاپلاس عبارت دوم نیز به همین صورت بدست می‌آید و در نهایت داریم.

$$H(s) = \alpha e^{-sT} + \alpha^3 e^{-3sT} \quad (۵۲-۶)$$

و یا

$$H(s) = \alpha e^{-sT} [1 + (\alpha e^{-sT})^2] \quad (۵۳-۶)$$

اگر مکان صفرها و قطب‌های این تابع را پیدا کنیم محل صفرها از مساوی صفر قرار دادن هر یک از عوامل تشکیل دهنده $H(s)$ بدست می‌آیند.

$$e^{-sT} = 0 \quad \text{یا} \quad \alpha^2 e^{-2sT} = -1 \quad (۵۴-۶)$$

تساوی اول غیر ممکن است و فقط تساوی دوم امکان پذیر است.

$$\alpha^2 e^{-2sT} = -1 \quad (۵۵-۶)$$

بنابراین

$$e^{-2sT} = \frac{-1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} e^{-jk\pi} \quad k \text{ عدد فرد است} \quad (۵۶-۶)$$

با لگاریتم گرفتن از دو طرف داریم.

$$-2sT = \ln \frac{1}{\alpha^2} - jk\pi \quad (۵۷-۶)$$

و با قرار دادن $s = \sigma + j\omega$ داریم.

$$-2T\sigma = \ln \frac{1}{\alpha^2} \quad (۵۸-۶)$$

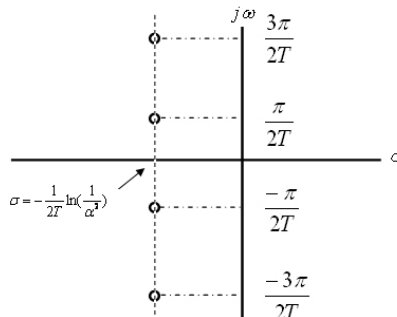
$$\sigma = -\frac{1}{2T} \ln\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \quad (۵۹-۶)$$

فصل ششم: تبدیل لاپلاس

$$-2T\omega = -k\pi \quad (۶۰-۶)$$

$$\omega = \frac{k\pi}{2T} \quad k = \pm 1, \pm 3, \dots \quad (۶۱-۶)$$

توجه شود که تابع قطب ندارد پس رسم نمودار صفر-قطب آن چنین است



شکل (۶-۱۴) نمودار صفر و قطب مثال (۶-۸)

۶-۳ معکوس تبدیل لاپلاس

قبلاً بدست آوردیم که تبدیل لاپلاس تابعی از s بوده و رابطه آن با تبدیل فوری سیگنال بصورت زیرمی باشد.

$$X(\sigma + j\omega) = F\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} dt \quad (۶۲-۶)$$

توجه کنید که انتگرال روی یک خط دلخواه در ROC در امتداد محور موهومی در نظر گرفته می شود. همچنین می توان تبدیل فوری معکوس را حساب کرد.

$$x(t)e^{-\sigma t} = F^{-1}\{X(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (۶۳-۶)$$

و اگر طرفین را در $e^{\sigma t}$ ضرب کنیم داریم.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega \quad (۶۴-۶)$$

در نهایت اگر متغیر انتگرال گیری را از ω به s تبدیل کنیم و در نظر داشته باشیم که σ ثابت است بگونه ای که $ds = jd\omega$ ، در اینصورت تبدیل لاپلاس معکوس بدین صورت بدست می آید.

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (۶۵-۶)$$

انتگرال باید روی خط $\Re\{s\} = \sigma$ گرفته شود بگونه ای که این خط در ROC قرار داشته باشد.

معمولاً محاسبه تبدیل لاپلاس معکوس از فرمول (۶-۶۵) مشکل است و از روش های دیگر برای اینکار استفاده می شود. یکی از این روش ها تبدیل $X(s)$ به مجموعی بصورت زیر است (اگر امکان داشته باشد).

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

$$X(s) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{s + a_i} \quad (۶۶-۶)$$

در اینصورت تبدیل معکوس با داشتن ناحیه همگرایی $X(s)$ بسادگی بدست می‌آید. این روش در اصطلاح به **بسط کسور جزئی**^۱ معروف است. برای واضح شدن مطلب به مثال (۹-۶) توجه کنید. مثال (۹-۶): مطلوبست تبدیل لاپلاس معکوس

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \Re\{s\} > -1 \quad (۶۷-۶)$$

برای بدست آوردن تبدیل معکوس $X(s)$ از روش بسط به کسور جزئی ابتدا $X(s)$ را مساوی مجموع دو کسر قرار می‌دهیم.

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \quad (۶۸-۶)$$

برای محاسبه A و B ، طرفین رابطه (۶-۶۸) را بترتیب در $(s+1)$ و سپس در $(s+2)$ ضرب کرده و در حاصل بترتیب $s = -1$ و سپس $s = -2$ قرار می‌دهیم. یعنی

$$X(s)(s+1) \Big|_{s=-1} = A + B \frac{s+1}{s+2} \Big|_{s=-1} = A \quad (۶۹-۶)$$

بنابراین

$$A = 1 \quad (۷۰-۶)$$

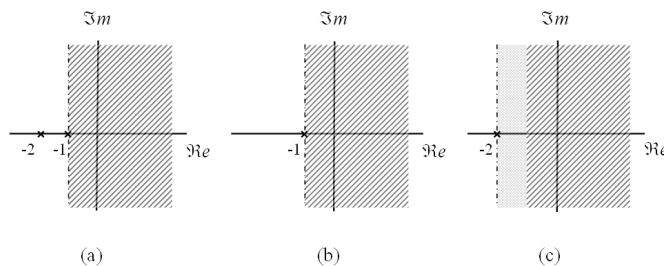
به همین ترتیب داریم.

$$B = -1 \quad (۷۱-۶)$$

بنابراین

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \quad (۷۲-۶)$$

اکنون باتوجه به داشتن ناحیه همگرایی متوجه می‌شویم که $x(t)$ یک سیگنال راست‌رو است. ناحیه همگرایی در شکل (۶-۱۶-۲) ترسیم شده است.



شکل (۶-۱۶): ساختار ROC برای عبارت‌های اولیه درسط کسرهای جزئی (a) نمودار صفر-قطب و ROC برای $x(t)$ قطب در $s = -1$ و ROC مربوط به سیگنال راست رو متناظر با آن (c) قطب در $s = -2$ و ROC مربوط به سیگنال راست رو متناظر با آن

^۱ Partial fraction expansion

فصل ششم: تبدیل لاپلاس

اما برای هر یک از کسرهای معادله (۷۲-۶) تبدیل فوریه چنین است.

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+1} \quad \text{و} \quad \Re\{s\} > -1 \quad (۷۳-۶)$$

$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+2} \quad \text{و} \quad \Re\{s\} > -2 \quad (۷۴-۶)$$

بنابراین

$$(e^{-t} - e^{-2t})u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \text{و} \quad \Re\{s\} > -1 \quad (۷۵-۶)$$

اکنون فرض کنید $X(s)$ ای داریم با همان عبارت جبری مثال (۹-۶)، ولی ناحیه همگرایی اش بصورت $\Re\{s\} < -2$ است. در اینصورت داریم (توجه کنید که سیگنال در این حالت چپرو است).

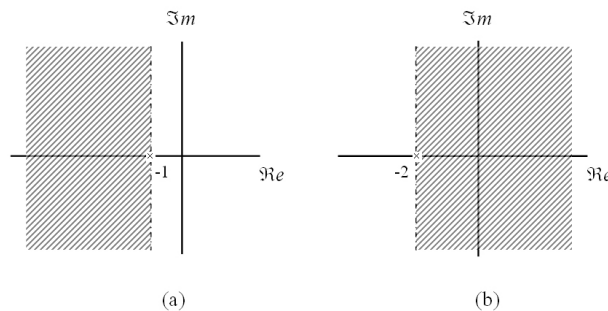
$$-e^{-t}u(-t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+1} \quad \Re\{s\} < -1 \quad (۷۶-۶)$$

$$-e^{-2t}u(-t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+2} \quad \Re\{s\} < -2 \quad (۷۷-۶)$$

در نتیجه

$$(-e^{-t} + e^{-2t})u(-t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \Re\{s\} < -2 \quad (۷۸-۶)$$

در نهایت فرض کنید همان $X(s)$ قبلی دارای ناحیه همگرایی $-2 < \Re\{s\} < -1$ باشد. در این حالت سیگنال باید دو جهته یا دو طرفه باشد و ناحیه همگرایی را بدو قسمت تقسیم می کنیم.



شکل (۷۵-۶): ناحیه همگرایی در (a) سیگنال چپرو و (b) راسترو

شکل (۷۶-۶) نمایانگر یک سیگنال چپرو است. پس

$$-e^{-t}u(-t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+1} \quad \Re\{s\} < -1 \quad (۷۹-۶)$$

و شکل (۷۷-۶) نمایانگر یک سیگنال راسترو است. پس

$$+e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+2} \quad \Re\{s\} > -2 \quad (۸۰-۶)$$

بنابراین داریم

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t) \xrightarrow{\ell} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad -2 < \Re\{s\} < -1 \quad (۸۱-۶)$$

۶-۴ خواص تبدیل لاپلاس

در این قسمت خواص تبدیل لاپلاس که از خیلی جهات مشابه خواص تبدیل فوریه هستند مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند. در تعیین تبدیل لاپلاس و ناحیه همگرایی سیگنال جدید باید دو نکته را به دقت بررسی کرد. نکته اول اینکه عبارت جبری تبدیل لاپلاس بر اثر تغییر ایجاد شده در حوزه زمان به چه صورت است؟ آیا صفر یا قطبی اضافه یا کم می‌شود؟ آیا محل صفرها و قطب‌ها تغییر می‌کند؟ و نکته دوم اینکه آیا این تغییر در تعداد صفرها یا قطب‌ها یا ناحیه همگرایی را نیز تحت تاثیر قرار می‌دهد؟ آیا رفتار ناحیه همگرایی به طور کلی تغییر می‌کند یا فقط جابجا می‌شود؟ به عبارت دیگر آیا سیگنال در حوزه زمان دچار تغییرات اساسی مثلاً تبدیل راست رو به چپ رو یا بالعکس می‌شود؟ در نظر گرفتن نکات فوق الذکر باعث می‌شود به سادگی تبدیل لاپلاس و ناحیه همگرایی جدید را بدست آوریم.

۶-۴-۱ خطی بودن تبدیل لاپلاس

فرض کنید

$$x_1(t) \xrightarrow{\ell} X_1(s) \quad \text{با ناحیه همگرایی } R_1 \quad (۸۲-۶)$$

$$x_2(t) \xrightarrow{\ell} X_2(s) \quad \text{با ناحیه همگرایی } R_2 \quad (۸۳-۶)$$

در اینصورت تبدیل لاپلاس و ناحیه همگرایی مجموع این دو سیگنال به صورت زیر است.

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xrightarrow{\ell} aX_1(s) + bX_2(s) \quad R_1 \cap R_2 \quad \text{با ناحیه همگرایی حداقل } R_1 \cap R_2 \quad (۸۴-۶)$$

ناحیه همگرایی حداقل فصل مشترک R_1 و R_2 است، و اگر این مجموعه تهی باشد تبدیل لاپلاس وجود نخواهد داشت. ممکن است ناحیه همگرایی بزرگتر از فصل مشترک باشد، مثلاً در معادله (۸۴-۶) اگر $x_1(t) = x_2(t)$ و $a = -b$ باشد در آنصورت $X(s) = 0$ می‌شود و ناحیه همگرایی کل صفحه s است.

مثال (۶-۱۰):

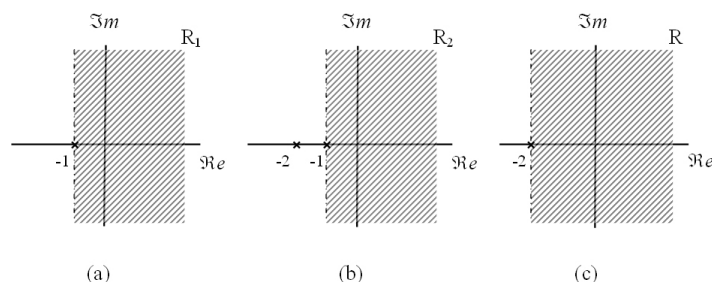
$$X_1(s) = \frac{1}{(s+1)} \quad R_1 : \Re\{s\} > -1$$

$$X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad R_2 : \Re\{s\} > -1$$

نمودار صفر-قطب این دو در شکل (۱۷-۶-a,b) ترسیم شده است. اکنون فرض کنید:

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \quad (۸۵-۶)$$

فصل ششم: تبدیل لاپلاس



شکل (۶-۱۷): (a) ROC مربوط به $X_1(s)$ (b) ROC مربوط به $X_2(s)$ (c) ROC مربوط به $X_1(s) - X_2(s)$ بنابراین در ترکیب خطی $X_1(s)$ و $X_2(s)$ قطب $s = -1$ بوسیله صفر در -1 خنثی می شود. بنابراین نمودار صفر - قطب بصورت شکل (c-۱۷-۶) در می آید. لذا ناحیه همگرایی $X(s)$ ، $\Re\{s\} > -2$ خواهد شد. بهر حال چون ناحیه همگرایی بوسیله قطبها محدود می شوند با خنثی شدن یک قطب در این مثال ناحیه همگرایی بزرگتر از فصل مشترک دو ناحیه همگرایی R_1 و R_2 شده است.

در حالت کلی تر اگر تبدیل لاپلاس $x(t)$ را به صورت زیر داشته باشیم.

$$x_k(t) \xleftrightarrow{\ell} X_k(s), \quad R_k \quad (۶-۸۶)$$

در آنصورت تبدیل لاپلاس هر ترکیب خطی از $x(t)$ ها به صورت زیر است.

$$x(t) = \sum_k a_k x_k(t) \xleftrightarrow{\ell} \sum_k a_k X_k(s), \quad R = \bigcap_k R_k \quad \text{حداقل} \quad (۶-۸۷)$$

۶-۴-۲ انتقال در حوزه زمان

اگر

$$x(t) \xleftrightarrow{\ell} X(s) \quad \text{ROC} = R \quad (۶-۸۸)$$

در آن صورت

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} X(s) \quad \text{ROC} = R \quad (۶-۸۹)$$

ناحیه همگرایی در حالت انتقال در حوزه زمان تغییر نخواهد کرد. چون جمله e^{-st_0} تنها قادر است قطب یا صفر در ∞ یا $-\infty$ ایجاد کند که در تعیین ناحیه همگرایی و نمودار صفر و قطب به هیچ وجه تاثیری ندارد.

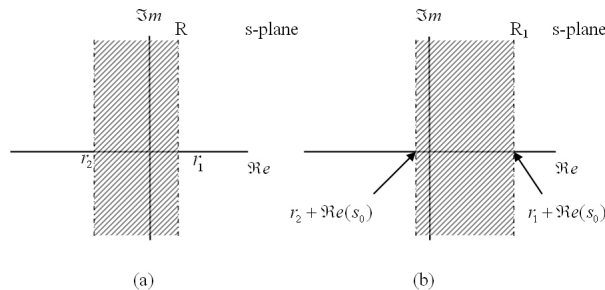
۶-۴-۳ انتقال در حوزه s

$$x(t) \xleftrightarrow{\ell} X(s) \quad \text{ROC} = R \quad (۶-۹۰)$$

$$e^{s_0 t} x(t) \xleftrightarrow{\ell} X(s - s_0) \quad \text{و} \quad \text{ROC} = R + \Re\{s_0\} \quad (۶-۹۱)$$

این بدین معنی است که ناحیه همگرایی مربوط به $X(s - s_0)$ همان ناحیه همگرایی $X(s)$ است که باندازه $\Re\{s_0\}$ انتقال پیدا کرده است. بنابراین برای هر مقدار s در R ، مقدار $s + \Re\{s_0\}$ در R_1 (ناحیه همگرایی $e^{s_0 t} x(t)$) قرار می گیرد. همانگونه که در شکل (۶-۱۸) نمایش داده شده است.

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها



شکل (۶-۱۸): اثر انتقال در حوزه s بر روی ROC (a) ROC مربوط به $x(t)$ (b) ROC مربوط به $X(s - s_0)$ توجه شود که در این خاصیت محل صفرها و قطب‌ها همگی به اندازه s_0 جابجا می‌شوند. اما با نگاهی به سیگنال حوزه زمان می‌فهمیم که شکل کلی سیگنال ثابت مانده است. به عبارت دیگر اگر سیگنال راست رو باشد، راست رو باقی می‌ماند. و اگر چپ رو باشد، چپ رو باقی می‌ماند. بنابراین شکل ناحیه همگرایی دچار تغییرات اساسی نمی‌شود و فقط دچار انتقال می‌گردد.

۶-۴-۴ مقیاس بندی درحوزه زمان

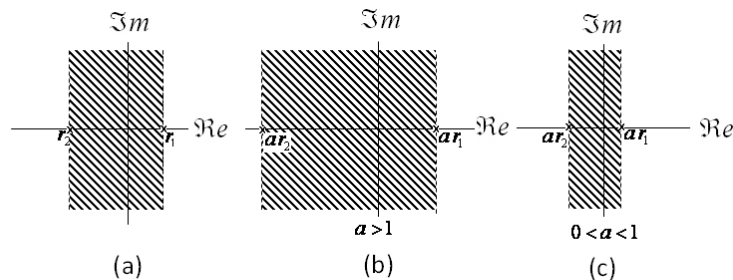
اگر

$$x(t) \xrightarrow{\ell} X(s) \quad \text{ROC} = R \quad (6-92)$$

آنگاه

$$x(at) \xrightarrow{\ell} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{ROC} = R_1 = aR \quad (6-93)$$

یعنی برای هر مقدار s در R ، $\frac{s}{a}$ باید در R_1 قرار داشته باشد. به شکل (۶-۱۹) توجه کنید.



شکل (۶-۱۹): اثر مقیاس‌بندی زمانی ROC (a) ROC مربوط به $x(t)$ (b) ROC مربوط به $\frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$ برای $a > 0$

(c) ROC مربوط به $\frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$ برای $0 < a < 1$

اگر a مثبت باشد در آنصورت شکل سیگنال در حوزه زمان دچار تغییرات اساسی نمی‌شود. به عبارت دیگر اگر سیگنال $x(t)$ راست رو یا چپ رو باشد در آن صورت سیگنال $x(at)$ نیز به ترتیب راست رو یا چپ رو می‌شود. اما اگر a منفی باشد در آن صورت شکل سیگنال در حوزه زمان دچار تغییرات اساسی می‌شود. به عبارت دیگر اگر سیگنال $x(t)$ راست رو باشد سیگنال $x(at)$ چپ رو می‌شود و

فصل ششم: تبدیل لاپلاس

بالعکس. بنابراین در تعیین ناحیه همگرایی جدید باید دقت شود که علاوه بر اینکه مکان صفرها و قطبها تغییر می کند، ناحیه همگرایی نیز در حالت $a < 0$ دچار تغییر شکل اساسی می شود. مثلاً اگر سیگنال $x(t)$ دارای نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی به صورت شکل (۶-۱۲b) باشد، نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی سیگنال $x(at)$ وقتی $a = -1$ است به صورت شکل (۶-۱۲c) می باشد. توجه شود که برای این مثال خاص، کلیه قطبهای در $s = s_p$ به قطبهای در $s = -s_p$ تبدیل می شوند. به علاوه سیگنال راست رو به سیگنال چپ رو تبدیل می شود. در نتیجه ناحیه همگرایی از حالت راست رو به حالت چپ رو تبدیل می شود.

۶-۴-۵ خاصیت کانولوشن

اگر

$$x_1(t) \xleftrightarrow{\ell} X_1(s) \quad ROC = R_1 \quad (۶-۹۴)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{\ell} X_2(s) \quad ROC = R_2 \quad (۶-۹۵)$$

بنابراین

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\ell} X_1(s)X_2(s) \quad R_1 \cap R_2 \quad \text{با ناحیه همگرایی حداقل} \quad (۶-۹۶)$$

ناحیه همگرایی $X_1(s)X_2(s)$ شامل حداقل فصل مشترک دو ناحیه همگرایی $X_1(s)$ و $X_2(s)$ می باشد و ممکن است بزرگتر شود اگر تعدادی از قطبها بوسیله صفرها خنثی شوند. به عنوان مثال اگر

$$X_1(s) = \frac{s+1}{s+2} \quad \Re\{s\} > -2 \quad (۶-۹۷)$$

و

$$X_2(s) = \frac{s+2}{s+1} \quad \Re\{s\} > -1 \quad (۶-۹۸)$$

در آن صورت $X_1(s)X_2(s) = 1$ و ناحیه همگرایی آن تمام صفحه s است (چون هیچ قطبی ندارد).

۶-۴-۶ مشتق گیری در حوزه زمان

اگر

$$x(t) \xleftrightarrow{\ell} X(s) \quad ROC = R \quad (۶-۹۹)$$

بنابراین

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\ell} sX(s) \quad \text{حداقل } ROC = R \quad (۶-۱۰۰)$$

بنا بر این اگر $X(s)$ قطبی در $s = 0$ داشته باشد حذف می شود. در نتیجه اگر این قطب یکی از مرزهای ناحیه همگرایی را تشکیل داده باشد ناحیه همگرایی مشتق بزرگتر خواهد شد. به عنوان مثال تبدیل لاپلاس تابع پله $x(t) = u(t)$ برابر $X(s) = \frac{1}{s}$ می شود. که ناحیه همگرایی آن $\Re\{s\} > 0$ است. اما تبدیل لاپلاس مشتق $\frac{dx(t)}{dt} = \delta(t)$ برابر واحد است. که ناحیه همگرایی آن کلیه صفحه s است. به عنوان

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

مثالی دیگر توجه کنید که تبدیل لاپلاس تابع $x(t) = u(-t)$ برابر $X(s) = -\frac{1}{s}$ می شود. که ناحیه همگرایی آن $\Re\{s\} < 0$ است. اما تبدیل لاپلاس مشتق $\frac{dx(t)}{dt} = -\delta(t)$ برابر منفی واحد است. که ناحیه همگرایی آن باز هم کلیه صفحه s است.

بنابراین این امکان وجود دارد که طی عملیات مشتق سیگنال یک طرفه چپ رو یا راست رو تبدیل به سیگنال دوره محدود شود و در نتیجه ناحیه همگرایی از چپ رو یا راست رو به تمام صفحه s تبدیل می شود.

همچنین در اینجا باید دقت نمود که اگر ناحیه همگرایی سیگنال $x(t)$ به قطب در صفر محدود شود و اگر بعد یا قبل از صفر قطبی وجود داشته باشد در آن صورت با حذف شدن قطب در صفر ناحیه همگرایی امتداد یافته و به قطب بعدی منتهی می شود. در این صورت شکل ناحیه همگرایی و معادل آن شکل سیگنال در حوزه زمان دچار تغییرات اساسی نمی شود و فقط ناحیه همگرایی توسعه می یابد. نکته آخری که در اینجا باید متذکر شد این است که اگر سیگنال $x(t)$ دارای قطبی در $s=0$ نباشد یا این قطب یکی از حدود ناحیه همگرایی نباشد، در آن صورت عملیات مشتق فقط احتمالاً قطب در صفر را حذف می کند یا صفری در صفر اضافه می کند و در ناحیه همگرایی هیچ تغییری بوجود نمی آید. تمرین: رابطه ۶-۱۰ را ثابت کنید.

۶-۵-۷) مشتقگیری در حوزه s

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (۶-۱۰)$$

نتیجتاً داریم.

$$\frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} (-t)x(t) e^{-st} dt \quad (۶-۱۰۲)$$

$$-tx(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{dX(s)}{ds} \quad ROC = R \quad (۶-۱۰۳)$$

دیده می شود که عملیات مشتق در حوزه فرکانس هیچ گونه تغییری در شکل کلی سیگنال حوزه زمان ایجاد نمی کند. بنابراین شکل کلی ناحیه همگرایی ثابت می ماند. اما از لحاظ نمودار صفر و قطب نیز عملیات مشتق در حوزه لاپلاس هیچ قطبی یا صفری را اضافه نمی کند و فقط مرتبه قطب را افزایش می دهد. بنابراین ناحیه همگرایی ثابت می ماند.

مثال (۶-۱۱): فرض کنید $x(t) = te^{-at}u(t)$. از آنجائیکه

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s+a} \quad \Re\{s\} > -a \quad (۶-۱۰۴)$$

بنابراین

$$te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+a} \right) = -\frac{1}{(s+a)^2} \quad \Re\{s\} > -a \quad (۶-۱۰۵)$$

با تعمیم کاربرد رابطه (۶-۱۰۳) داریم.

فصل ششم: تبدیل لاپلاس

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{(s+a)^n} \quad \Re\{s\} > -a \quad (۱۰۶-۶)$$

کاربرد رابطه (۱۰۶-۶) بیشتر زمانی است که بخواهیم تبدیل لاپلاس معکوس را حساب کنیم.
تمرین: رابطه (۱۰۶-۶) را ثابت کنید.

۸-۴-۶ انتگرالگیری در حوزه زمان

اگر

$$x(t) \xleftrightarrow{\ell} X(s) \quad ROC = R \quad (۱۰۷-۶)$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s} X(s) \quad ROC = R \cap \{\Re\{s\} > 0\} \quad \text{حداقل} \quad (۱۰۸-۶)$$

این خاصیت مستقیماً با انتگرالگیری از دو طرف رابطه تبدیل لاپلاس معکوس بدست می آید ولی می توان آنرا بطریق زیر نیز بدست آورد.

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = u(t) * x(t) \quad (۱۰۹-۶)$$

بنابراین با توجه به خاصیت کانولوشن و چون $\Re\{s\} > 0$ و $\frac{1}{s} \xleftrightarrow{\ell} u(t)$ می باشد داریم.

$$u(t) * x(t) \xleftrightarrow{\ell} \frac{1}{s} X(s) \quad (۱۱۰-۶)$$

و ناحیه همگرایی آن شامل فصل مشترک ناحیه همگرایی $X(s)$ و تبدیل لاپلاس $u(t)$ است.

۹-۴-۶ تئوری مقادیر اولیه و نهایی

در حالت های خاصی که $x(t < 0) = 0$ و همچنین حالت هایی که در آنها $x(t)$ شامل هیچگونه توابع ضربه و مشتقات آن در صفر نباشد می توان بسادگی از تبدیل لاپلاس مقادیر اولیه یا $x(0^+)$ مقدار $x(t)$ هنگامی که t از طرف مقادیر مثبت به سمت صفر میل کند (و یا همچنین مقدار $x(t)$ هنگامی که $t \rightarrow \infty$ را بدست آورد. مقادیر اولیه و نهایی از روابط زیر بدست می آیند.

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad (۱۱۱-۶)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (۱۱۲-۶)$$

تمرین: فرمول های فوق را ثابت کنید.

۱۰-۴-۶ تبدیل لاپلاس سیستم معکوس

اگر

$$h(t) \xleftrightarrow{\ell} H(s) \quad ROC = R_h \quad (۱۱۳-۶)$$

در آن صورت عبارت جبری تبدیل لاپلاس سیستم معکوس $(h_i(t))$ که در رابطه $h(t) * h_i(t) = \delta(t)$ صدق می کند از رابطه زیر بدست می آید.

$$h_i(t) \xleftrightarrow{\ell} H_i(s) = \frac{1}{H(s)} \quad (۱۱۴-۶)$$

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

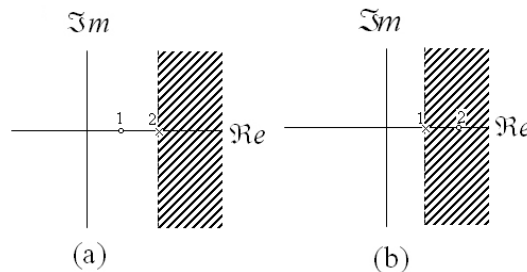
بنابراین صفرهای سیستم اصلی به قطب در سیستم معکوس، و قطب‌های سیستم اصلی به صفر در سیستم معکوس تبدیل می شوند. مسئله اصلی ناحیه همگرایی است. می توان ثابت کرد که در حالت کلی ناحیه همگرایی سیستم معکوس در این مورد یکتا نیست. آنچه مهم است این است که ناحیه همگرایی سیستم معکوس باید ناحیه مشترکی با ناحیه همگرایی سیستم اصلی داشته باشد، تا امکان ضرب کردن تبدیل لاپلاس سیستم اصلی و سیستم معکوس وجود داشته باشد.

این حقیقت بسیار جالب است چون نتیجه ساده آن این است که تعداد جفت سیگنالهایی که کانولوشن کردن آنها منجر به تابع ضربه می شود بیش از واحد می تواند باشد.

برای توضیح نحوه پیدا کردن ناحیه همگرایی سیستم معکوس به مثالهای زیر توجه کنید.

(مثال ۶-۱۲): فرض کنید سیستمی با تابع انتقال و ناحیه همگرایی زیر داده شده باشد.

$$H(s) = \frac{s-1}{s-2} = 1 + \frac{1}{s-2}; \quad \text{Re}(s) > 2$$



شکل (۶-۲۰) نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی (a) سیستم اصلی (b) سیستم معکوس

پاسخ ضربه این سیستم به صورت زیر بدست می آید.

$$h(t) = \delta(t) + e^{2t}u(t)$$

تابع انتقال سیستم معکوس نیز به صورت زیر بدست می آید.

$$H_i(s) = \frac{s-2}{s-1} = 1 - \frac{1}{s-1}; \quad \text{Re}(s) > 1$$

که از آن داریم.

$$h_i(t) = \delta(t) - e^t u(t)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} h_i(t) * h(t) &= [\delta(t) - e^t u(t)] * [\delta(t) + e^{2t} u(t)] \\ &= \delta(t) - e^t u(t) + e^{2t} u(t) - e^t u(t) * 2^{2t} u(t) = \delta(t) \end{aligned}$$

اما اگر ناحیه همگرایی تابع انتقال سیستم معکوس را به صورت $\text{Re}(s) < 1$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت.

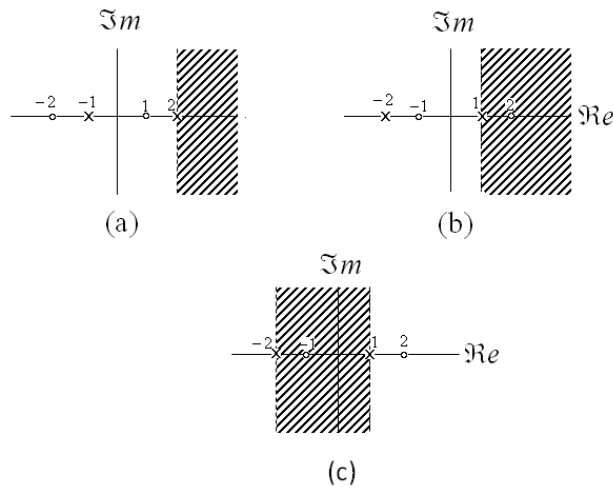
$$h_i(t) = \delta(t) + e^t u(-t)$$

فصل ششم: تبدیل لاپلاس

در اینصورت حاصل کانولوشن $h_i(t) * h(t)$ وجود نخواهد داشت. چون ناحیه همگرایی مشترک بین $h(t)$ و $h_i(t)$ وجود ندارد.

مثال (۶-۱۳): مطلوبست ضابطه سیستم معکوس مربوط به سیستمی که ضابطه و ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه آن به صورت زیر است.

$$H(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)} = 1 + \frac{\frac{2}{3}}{s+1} + \frac{\frac{4}{3}}{s-2}; \quad \text{Re}(s) > 2$$



شکل (۶-۲۱) نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی (a) سیستم اصلی (b) ضابطه اول سیستم معکوس (c) ضابطه دوم سیستم معکوس

ضابطه پاسخ ضربه سیستم به صورت زیر است.

$$h(t) = \delta(t) + \frac{2}{3}e^{-t}u(t) + \frac{4}{3}e^{2t}u(t)$$

ضابطه و دو ناحیه همگرایی ممکن سیستم معکوس به صورت زیر است.

$$H_i(s) = \frac{(s+1)(s-2)}{(s-1)(s+2)} = 1 - \frac{\frac{2}{3}}{s-1} - \frac{\frac{4}{3}}{s+2}; \quad \begin{cases} \text{Re}\{s\} > 1 \\ -2 < \text{Re}\{s\} < 1 \end{cases}$$

با توجه به شکل برای سیستم معکوس دو ناحیه همگرایی ممکن تعریف می شود. این دو ناحیه همگرایی در شکل های (۶-۲۱b, c) رسم شده اند. بنابراین دو رابطه برای سیستم معکوس بدست می آید.

$$h_i(t) = \delta(t) - \frac{2}{3}e^{t}u(t) - \frac{4}{3}e^{-2t}u(t)$$

$$h_i(t) = \delta(t) + \frac{2}{3}e^{t}u(-t) - \frac{4}{3}e^{-2t}u(t)$$

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

ضابطه اول علی و ضابطه دوم پایدار است. اما هر دو معکوس سیستم اصلی هستند و حاصل کانولوشن آنها با سیستم اصلی برابر تابع ضربه است.

$$[\delta(t) - \frac{2}{3}e^t u(t) - \frac{4}{3}e^{-2t} u(t)] * [\delta(t) + \frac{2}{3}e^{-t} u(t) + \frac{4}{3}e^{2t} u(t)] = \delta(t)$$

$$[\delta(t) + \frac{2}{3}e^t u(-t) - \frac{4}{3}e^{-2t} u(t)] * [\delta(t) + \frac{2}{3}e^{-t} u(t) + \frac{4}{3}e^{2t} u(t)] = \delta(t)$$

۵-۶ بررسی خواص سیستم‌های خطی مشخص شده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

همانطور که قبلاً دیدیم از تبدیل فوریه برای تجزیه و تحلیل سیستم‌های خطی، که با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت توصیف می شوند، استفاده کردیم و اکنون به روشی مشابه می‌خواهیم از تبدیل لاپلاس استفاده کنیم. به عنوان مثال فرض کنید که رابطه ورودی-خروجی یک سیستم با معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت زیر مشخص می‌شود.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t) \quad (۱۱۵-۶)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف داریم.

$$sY(s) + 3Y(s) = X(s) \quad (۱۱۶-۶)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{1}{s+3} \quad (۱۱۷-۶)$$

به $H(s)$ تابع تبدیل سیستم می‌گویند که تبدیل معکوس آن همان پاسخ ضربه سیستم خواهد بود. بدین ترتیب عبارت جبری $H(s)$ پیدا شد ولی باید ROC نیز تعیین شود. درحقیقت معادله دیفرانسیل به تنهایی بیانگر یک سیستم LTI نخواهد بود و درحالت کلی برای یک معادله دیفرانسیل، بسته به اینکه بدانیم سیستم علی است یا غیرعلی، می‌توان چند ناحیه همگرایی یا بطور معادل چند پاسخ ضربه تعیین کرد. اما اگر بدانیم سیستم علی است می‌توان ناحیه همگرایی‌اش را در سمت راست آخرین قطب (یا بزرگترین قطب) بگونه‌ای که شامل هیچ قطبی نشود رسم کرد. دراین مثال ناحیه همگرایی در سمت راست قطب $s = -3$ فرض می‌شود.

اما اگر سیستم فوق غیر علی بود ناحیه همگرایی در سمت چپ $s = -3$ قرار می‌گرفت. در حالت اول پاسخ ضربه(علی) بصورت زیر خواهد بود.

$$h(t) = e^{-3t} u(t) \quad (۱۱۸-۶)$$

و در حالت دوم پاسخ ضربه(غیرعلی) برابر است با

$$h(t) = -e^{-3t} u(-t) \quad (۱۱۹-۶)$$

در حالت کلی برای یک معادله دیفرانسیل بصورت زیر

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (۱۲۰-۶)$$

فصل ششم: تبدیل لاپلاس

با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادله فوق داریم.

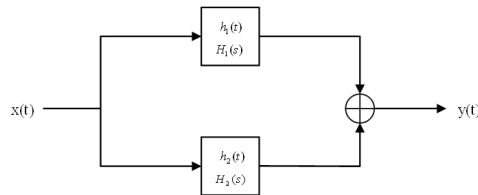
$$\left(\sum_{k=0}^N a_k s^k\right) Y(s) = \left(\sum_{k=0}^M b_k s^k\right) X(s) \quad (۶-۱۲۱)$$

بنابراین

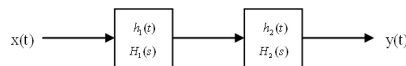
$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad (۶-۱۲۲)$$

۶-۶ اتصال سیستم‌ها

با کمک تبدیل لاپلاس می‌توان تابع تبدیل ترکیبات مختلف سیستم‌ها را تعیین کرد. چند ترکیب ساده به عنوان مثال در زیر ارائه شده‌اند.



(a)



(b)

شکل (۶-۲۲): (a) اتصال موازی دو سیستم LTI (b) اتصال سری دو سیستم LTI

برای شکل (۶-۲۲-a) داریم.

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \quad (۶-۱۲۳)$$

بنابراین رابطه تبدیل لاپلاس کلی سیستم بصورت زیر خواهد بود.

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) \quad (۶-۱۲۴)$$

و برای شکل (۶-۲۲-b) داریم.

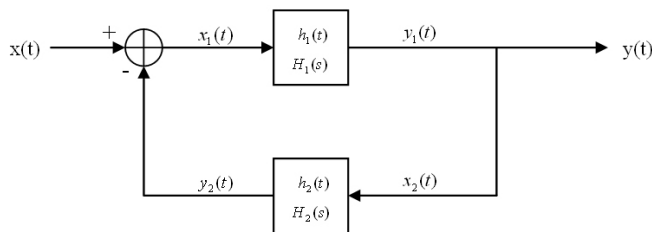
$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) \quad (۶-۱۲۵)$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \quad (۶-۱۲۶)$$

تمرین: تابع تبدیل ترکیب سیستم‌هایی به صورت شکل (۶-۲۳) را تعیین کنید. این نحو اتصال سیستم‌ها به اتصال پس‌خور^۱ معروف است.

^۱ Feedback

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها



شکل (۶-۲۳): اتصال فیدبک دو سیستم LTI

تمرین: ثابت کنید شرط کافی برای پایداری یک سیستم آن است که ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه آن شامل محور $j\omega$ باشد.

۶-۷ تبدیل لاپلاس یکطرفه

در قسمت‌های قبلی این فصل به تفصیل در مورد تبدیل لاپلاس دو طرفه صحبت کردیم. اما در این قسمت راجع به نوع دیگر تبدیل لاپلاس که در تحلیل سیستم‌های علی با شرایط اولیه (سیستم هائی که در حالت استراحت اولیه نیستند) کاربرد دارد صحبت خواهیم کرد. تبدیل لاپلاس یکطرفه $\chi(s)$ سیگنال $x(t)$ چنین تعریف می‌شود.

$$\chi(s) \triangleq \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (۶-۱۲۷)$$

با این تعریف اگر دو سیگنال بازاء $t < 0$ متفاوت و بازاء $t > 0$ یکسان باشند، تبدیل لاپلاس یکطرفه یکسانی خواهند داشت ولی تبدیل لاپلاس دو طرفه‌شان یکسان نیست. بنابراین تبدیل لاپلاس یکطرفه را می‌توان همان تبدیل لاپلاس دو طرفه برای سیگنال‌هایی تصور کرد که بازاء $t < 0$ و $t = 0^-$ مساوی صفر هستند. بنابراین ناحیه همگرایی معادله (۶-۱۲۷) در سمت راست بزرگترین قطب از لحاظ مقدار حقیقی قرار دارد. در نتیجه نیازی به ذکر ناحیه همگرایی نیست. مثال (۶-۱۴): سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t) \quad (۶-۱۲۸)$$

هر دو تبدیل لاپلاس یکطرفه و دوطرفه در این مورد یکی می‌شوند و داریم.

$$\chi(s) = X(s) = \frac{1}{(s+a)^n} \quad \Re\{s\} > -a \quad (۶-۱۲۹)$$

مثال (۶-۱۴): اکنون فرض کنید.

$$x(t) = e^{-a(t-t_0)} u(t-t_0) \quad (۶-۱۳۰)$$

تبدیل لاپلاس دو طرفه برای این مثال را قبلاً از خاصیت انتقال زمانی بدست آوردیم.

$$X(s) = \frac{e^{-st_0}}{s+a} \quad \Re\{s\} > -a \quad (۶-۱۳۱)$$

حالا تبدیل لاپلاس یکطرفه بدست می‌آوریم.

فصل ششم: تبدیل لاپلاس

$$\chi(s) = \int_{0^+}^{+\infty} e^{-a(t-t_0)} u(t-t_0) e^{-st} dt \quad (۱۳۲-۶)$$

$$\chi(s) = \begin{cases} \int_{0^+}^{+\infty} e^{at_0} e^{-t(s+a)} dt & ; t_0 \leq 0 \\ \int_{t_0}^{+\infty} e^{at_0} e^{-t(s+a)} dt & ; t_0 > 0 \end{cases} \quad (۱۳۳-۶)$$

بنابراین

$$\chi(s) = \begin{cases} e^{at_0} \frac{1}{s+a} & ; t_0 \leq 0 \\ e^{st_0} \frac{1}{s+a} & ; t_0 > 0 \end{cases} \quad \Re\{s\} > -a \quad (۱۳۴-۶)$$

در این مثال دیده می شود که تبدیل لاپلاس دو طرفه و یک طرفه برای حالت $t_0 > 0$ برابرند. اما اگر $t_0 \leq 0$ دو پاسخ مختلف برای تبدیل لاپلاس یکطرفه و دو طرفه بدست می آید.

با استناد به مطالبی که تاکنون گفته شد، پی می بریم که تبدیل لاپلاس یکطرفه $\chi(s)$ در واقع تبدیل لاپلاس دو طرفه مربوط به سیگنال $x(t)u(t)$ است، نه سیگنال $x(t)$. بسیاری از خواص تبدیل یکطرفه و دوطرفه یکسان هستند و در حقیقت دو قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی بیشتر مربوط به تبدیل لاپلاس یکطرفه هستند. چون برای صادق بودن آن دو قضیه گفتیم که لازم است $x(t)$ برای $t < 0$ مساوی صفر باشد و هیچگونه تابع ضربه یا مشتقاتش را در صفر نداشته باشد. یکی از مهمترین تفاوت های خواص تبدیل لاپلاس یکطرفه و دوطرفه در خاصیت مشتق گیری است. فرض کنید $x(t)$ دارای تبدیل لاپلاس یکطرفه $\chi(s)$ است بنابراین با انتگرال گیری جزء به جزء از $\frac{dx(t)}{dt}$ داریم.

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(t)e^{-st} \Big|_{0^+}^{\infty} + s \int_{0^+}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (۱۳۵-۶)$$

بنابراین

$$\frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{\varphi} s\chi(s) - x(0^+)$$

بطور مشابه داریم.

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{\varphi} s^2 \chi(s) - sx(0^+) - x'(0^+) \quad (۱۳۶-۶)$$

که $x'(0^+)$ مشتق در $t = 0^+$ است.

یکی از کاربردهای اساسی تبدیل لاپلاس یکطرفه در حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت با شرایط اولیه غیر صفر (غیر استراحت اولیه) می باشد. به عنوان مثال سیستم علی که بوسیله معادله زیر مشخص می شود را در نظر بگیرید.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 6y(t) = x(t) \quad (۱۳۷-۶)$$

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

با شرایط اولیه

$$y(0^+) = 1 \quad \text{و} \quad \frac{dy(0^+)}{dt} = -2$$

اگر ورودی این سیستم $x(t) = u(t)$ باشد، با گرفتن تبدیل لاپلاس یکطرفه از دو طرف معادله (۶-۱۳۷) داریم.

$$s^2 Y(s) - s + 2 + sY(s) - 1 - 6Y(s) = \frac{1}{s} \quad (۶-۱۳۸)$$

$$Y(s) = \frac{1 + s^2 - s}{s(s+3)(s-2)} \quad (۶-۱۳۹)$$

که در آن $Y(s)$ تبدیل لاپلاس یکطرفه $y(t)$ است. با بسط رابطه (۶-۱۳۹) داریم.

$$Y(s) = \frac{-1}{s} + \frac{13}{s+3} + \frac{3}{s-2} \quad (۶-۱۴۰)$$

که نتیجتاً داریم.

$$y(t) = \left[-\frac{1}{6} + \frac{13}{15}e^{-3t} + \frac{3}{10}e^{2t} \right] u(t) \quad (۶-۱۴۱)$$

مثال (۶-۱۵): ثابت کنید اگر تابع انتقال سیستمی دارای قطب‌های بیشتری نسبت به صفرها باشد و علاوه بر آن سیستم علی باشد پاسخ پله در $t = 0$ پیوسته است.

حل: کافی است نشان دهیم پاسخ پله در $t = 0^+$ برابر صفر است. فرض کنید تابع انتقال سیستم به صورت زیر باشد.

$$H(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} \quad n > m \quad (۶-۱۴۲)$$

پاسخ ورودی پله چنین است.

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{(s+z_1)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)\dots(s+p_n)} \quad (۶-۱۴۳)$$

بدلیل علیت سیستم می‌توان از تئوری مقدار اولیه استفاده کرد. از تئوری مقدار اولیه داریم.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(s+z_1)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)\dots(s+p_n)} \quad (۶-۱۴۴)$$

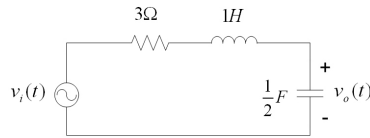
چون درجه مخرج از صورت بزرگتر است حد بسمت صفر میل می‌کند، پس

$$y(0^+) = 0$$

تمرین: در مدار شکل (۶-۲۴) $v_o(t)$ را به کمک تبدیل لاپلاس یکطرفه بدست آورید.

$$v_o(0^+) = 1 \quad \text{و} \quad \left. \frac{dv_o(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = 2$$

فصل ششم: تبدیل لاپلاس



شکل (۶-۲۴): یک مدار RLC خطی

مثالهای حل شده

مثال (۶-۱۶): تبدیل لاپلاس، ناحیه همگرایی و نمودار صفر و قطب هر یک از توابع زیر را بیابید.

الف) $x(t) = \delta(t - t_0)$

ب) $x(t) = u(-t)$

حل: الف)

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st_0} \delta(t - t_0) dt$$

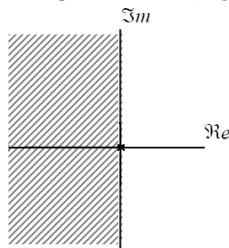
بنابراین

$$X(s) = e^{-st_0}$$

این تبدیل هیچ صفر و یا قطب محدودی ندارد ولی می توان گفت که به ازاء $t_0 > 0$ ، $-\infty$ قطب و $+\infty$ صفر این تبدیل بحساب می آیند و به ازاء $t_0 < 0$ ، $-\infty$ صفر و $+\infty$ قطب این تبدیل می باشند. پس ناحیه همگرایی تمام صفحه s خواهد شد.

ب) $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(-t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \quad \Re[s] < 0$

فقط به ازاء $\Re[s] < 0$ انتگرال فوق همگرا و مساوی $-\frac{1}{s}$ خواهد بود بنابراین ناحیه همگرایی سمت چپ محور $j\omega$ را در بر خواهد گرفت و تنها یک قطب در $s = 0$ وجود دارد.



شکل (۶-۲۵) ناحیه همگرایی مربوط به قسمت ب مثال ۶-۱۶

مثال (۶-۱۷): تبدیل لاپلاس و ناحیه همگرایی سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t - kT)$$

حل:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t - kT) \right] e^{-st} dt$$

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

با تغییر ترتیب انتگرال و مجموع داریم.

$$X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) e^{-st} dt$$

با توجه به حل مثال (۶-۱۶) قسمت الف داریم.

$$X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-skT}$$

اما رابطه فوق مبین یک تصاعد هندسی با قدر نسبت ae^{-sT} می باشد و تنها بشرطی این مجموعه همگرا می گردد که

$$|ae^{-sT}| < 1$$

با نوشتن s بصورت $\sigma + j\omega$ ، چون $e^{-\sigma T}$ همواره نامنفی است می توان آن را از زیر علامت قدر مطلق بیرون کشید در این صورت داریم.

$$e^{-\sigma T} < \frac{1}{|a|} \Rightarrow -\sigma T < \ln \frac{1}{|a|}$$

در نهایت ناحیه همگرایی بصورت زیر حاصل می شود.

$$\Re[s] > \frac{-1}{T} \ln\left(\frac{1}{|a|}\right)$$

در این صورت داریم.

$$X(s) = \frac{1}{1 - ae^{-sT}}$$

واضح است که این تبدیل صفر (محدود) ندارد ولی قطب های آن ریشه های مخرج هستند.

$$1 - ae^{-sT} = 0 \Rightarrow ae^{-sT} = 1$$

از این رابطه می توان نتیجه گرفت.

$$e^{-sT} = \frac{1}{a}$$

ابتدا فرض می کنیم $a > 0$ باشد در این صورت حل معادله فوق بصورت زیر است.

$$e^{-(\sigma + j\omega)T} = \frac{1}{a} \Rightarrow e^{-\sigma T} = \frac{1}{a} ; e^{-j\omega T} = e^{-j2k\pi}$$

بنابراین

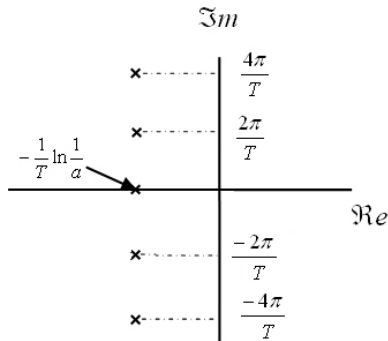
$$\sigma = \frac{-1}{T} \ln\left(\frac{1}{a}\right)$$

و

$$\omega = \frac{2k\pi}{T}$$

نمودار صفر و قطب در شکل ۶-۲۶ رسم شده است.

فصل ششم: تبدیل لاپلاس

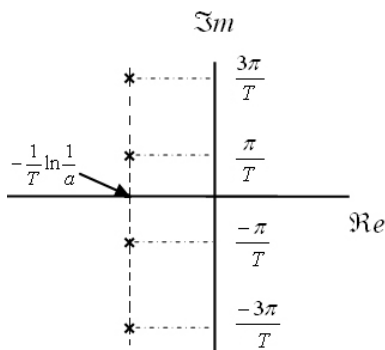


شکل (۶-۲۶) نمودار صفر و قطب برای حالت $a > 0$ در مثال ۶-۱۷

بطریقه مشابه اگر $a < 0$ باشد محل قطب‌ها از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\sigma = \frac{-1}{T} \ln\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\omega = (2k+1)\frac{\pi}{T}$$



شکل (۶-۲۷) نمودار صفر و قطب برای حالت $a < 0$ در مثال ۶-۱۷

مثال (۶-۱۸): برای هر یک از عبارت‌های زیر در مورد یک سیگنال مفروض $x(t)$ و برای هر یک از

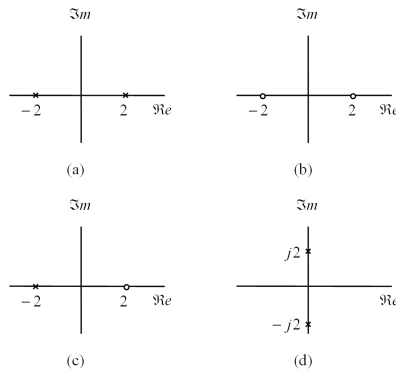
چهار نمودار صفر و قطب رسم شده در شکل ۶-۲۸ تعیین کنید که ناحیه همگرایی چگونه خواهد بود.

الف) تبدیل فوریه $x(t)e^{-t}$ وجود دارد.

ب) $t > 10, x(t) = 0$

ج) $t < 0, x(t) = 0$

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها



شکل (۶-۲۸) مربوط به مثال ۶-۱۸

حل: توجه شود که شکل (b) حتما مربوط به یک سیگنال دوره محدود است چون تنها سیگنالهای دوره محدود هستند که دارای هیچ قطبی نیستند. بنابراین ناحیه همگرایی چنین سیگنالی تمام صفحه s است.

الف) چون تبدیل فوریه $x(t)e^{-t}$ وجود دارد پس انتگرال زیر همگرا است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(1+j\omega)t} dt$$

بنابراین $\sigma = 1$ جزو ناحیه همگرایی است و چون ناحیه همگرایی نمی تواند شامل قطب شود و از طرفی توسط قطبها محدود می شود می توان نواحی همگرایی را برای هر یک از چهار نمودار صفر و قطب بصورت شکل (۶-۲۹) رسم کرد.

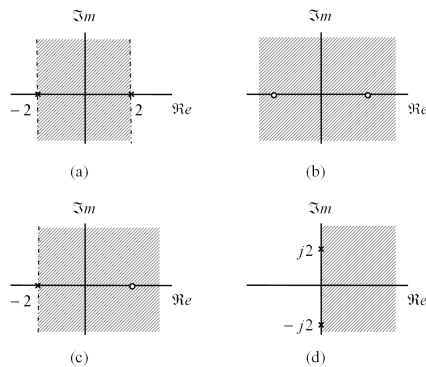
پس نواحی همگرایی بصورت زیر خواهد بود.

برای شکل (a) $-2 < \Re[s] < 2$

برای شکل (b) $-\infty < \Re[s] < \infty$

برای شکل (c) $\Re[s] > -2$

برای شکل (d) $\Re[s] > 0$



شکل (۶-۲۹) نواحی همگرایی را برای هر یک از چهار نمودار صفر و قطب برای حالت الف

فصل ششم: تبدیل لاپلاس

ب) چون سیگنال چپرو است پس نواحی همگرایی بصورت زیر خواهند بود (جهت اختصار از رسم شکل صرفنظر می شود).

$$\Re[s] < -2 \quad \text{برای شکل (a)}$$

$$\Re[s] < -2 \quad \text{برای شکل (c)}$$

$$\Re[s] < 0 \quad \text{برای شکل (d)}$$

ج) چون سیگنال راسترو است پس نواحی همگرایی توسط روابط زیر داده می شوند

$$\Re[s] > 2 \quad \text{برای شکل (a)}$$

$$\Re[s] > -2 \quad \text{برای شکل (c)}$$

$$\Re[s] > 0 \quad \text{برای شکل (d)}$$

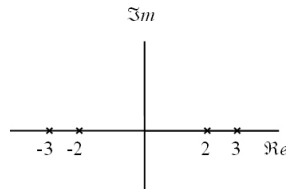
مثال (۶-۱۹): تمام روابط زمانی ممکنه $x(t)$ که دارای عبارت جبری تبدیل لاپلاس بصورت زیر هستند را بیابید.

$$X(s) = \frac{4s^3 - 26s}{(s^2 - 9)(s^2 - 4)}$$

حل: از بسط $X(s)$ به کسور جزیی داریم.

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s-3}$$

می بینیم $X(s)$ مجموع چهار کسر جزیی است و نمودار صفر و قطب آن بصورت شکل (۶-۳۰) است.



شکل (۶-۳۰) نمودار صفر و قطب مربوط به مثال ۶-۱۹

پنج حالت مختلف برای ناحیه همگرایی وجود دارد، پس پنج رابطه زمانی مختلف برای $x(t)$ امکان دارد.

الف: اگر ناحیه همگرایی بصورت $\Re[s] < -3$ باشد رابطه زمانی $x(t)$ باید از مجموع چهار سیگنال چپرو بدست آید، پس

$$x(t) = -(e^{-2t} + e^{-3t} + e^{2t} + e^{3t})u(-t)$$

ب: اگر ناحیه همگرایی بصورت $-3 < \Re[s] < -2$ باشد رابطه زمانی $x(t)$ باید از مجموع سه سیگنال چپرو (مربوط به قطبهای ۲ و ۳ و -۲) و یک سیگنال راسترو (مربوط به قطب -۳) بدست آید. پس

$$x(t) = e^{-3t}u(t) - (e^{-2t} + e^{2t} + e^{3t})u(-t)$$

ج: اگر ناحیه همگرایی بصورت $-2 < \Re[s] < 2$ باشد رابطه زمانی $x(t)$ باید از مجموع دو سیگنال چپرو (مربوط به قطبهای ۲ و ۳) و دو سیگنال راسترو (مربوط به قطبهای -۲ و -۳) بدست آید، پس

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

$$x(t) = (e^{-3t} + e^{-2t})u(t) - (e^{3t} + e^{2t})u(-t)$$

د: اگر ناحیه همگرایی بصورت $2 < \Re[s] < 3$ باشد رابطه زمانی $x(t)$ باید از مجموع یک سیگنال چپ‌رو (مربوط به قطب ۳) و سه سیگنال راست‌رو (مربوط به قطبهای ۲ و ۳ و -۲) بدست آید، پس

$$x(t) = (e^{-3t} + e^{-2t} + e^{2t})u(t) - e^{3t}u(t)$$

ه: اگر ناحیه همگرایی بصورت $\Re[s] > 3$ باشد در آنصورت رابطه زمانی $x(t)$ از مجموع چهار سیگنال راست‌رو بدست می‌آید، پس

$$x(t) = (e^{-3t} + e^{-2t} + e^{2t} + e^{3t})u(t)$$

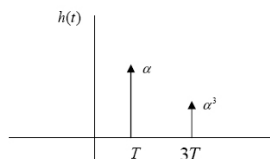
مثال (۶-۲۰): تبدیل لاپلاس $X(s)$ یک سیگنال $x(t)$ دارای چهار قطب و تعداد نامعلومی صفر می‌باشد. اگر فقط بدانیم $x(t)$ دارای یک ضربه در $t = 0$ است تعیین کنید چه اطلاعاتی در مورد تعداد صفرها و محل آنها می‌توانیم داشته باشیم.

حل: چون $x(t)$ دارای ضربه در $t = 0$ است پس باید $X(s)$ بصورت زیر باشد.

$$X(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{D(s) + N(s)}{D(s)}$$

که در آن $N(s)$ و $D(s)$ یک چند جمله ای برحسب s هستند. چون چهار قطب برای $X(s)$ وجود دارد می‌توان گفت که درجه صورت نیز حداقل چهار است، پس حداقل چهار صفر نیز برای تبدیل لاپلاس $X(s)$ وجود خواهد داشت. در مورد محل صفرها با اطلاعات داده شده در صورت مسئله فعلا نمی‌توان قضاوتی داشت.

مثال (۶-۲۱): یک سیستم با پاسخ ضربه به صورت زیر مفروض است.



شکل (۶-۳۱) پاسخ ضربه سیستم مربوط به مثال ۶-۲۱

مطلوب است $H(s)$ و تعیین صفرها، قطب‌ها و ناحیه همگرایی آن.
حل: داریم.

$$h(t) = \alpha\delta(t-T) + \alpha^3\delta(t-3T)$$

بنابراین بسادگی می‌توان تبدیل لاپلاس را بدست آورد.

$$H(s) = \alpha e^{-sT} + \alpha^3 e^{-3sT}$$

این تبدیل قطب ندارد. بنابراین ناحیه همگرایی آن تمام صفحه s خواهد بود. اما دارای صفر است که محل صفرها از مساوی صفر قرار دادن $H(s)$ بدست می‌آید.

$$\alpha e^{-sT} = -\alpha^3 e^{-3sT}$$

چون $s = \sigma + j\omega$ بنابراین خواهیم داشت.

فصل ششم: تبدیل لاپلاس

$$\alpha e^{-\sigma T} e^{-j\omega T} = \alpha^3 e^{-3\sigma T} e^{-j(3\omega T + (2k+1)\pi)}$$

که در آن k عدد صحیح است. پس محل صفرها از حل دو معادله زیر برای σ و ω بدست می آید

$$\alpha^2 e^{-2\sigma T} = 1$$

$$2\omega T = (2k+1)\pi$$

بنابراین

$$s = \frac{-1}{2T} \ln\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) + j \frac{(2k+1)\pi}{2T}$$

به ازاء هر k که عدد صحیح باشد یک صفر را مشخص می نماید.

مثال (۶-۲۲): نشان دهید که اگر $x(t)$ یک تابع زوج باشد بگونه ای که $x(t) = x(-t)$ ، در آن صورت

$$X(s) = X(-s)$$

حل: چون تابع زوج است داریم

$$x(t) = x(-t)$$

و با تبدیل لاپلاس گرفتن از دو طرف رابطه فوق رابطه زیر را خواهیم داشت

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) e^{-st} dt$$

و یا

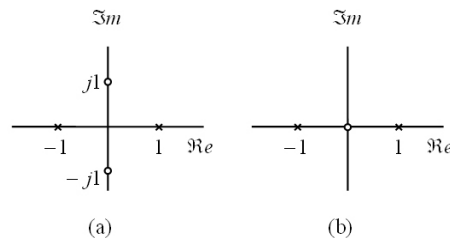
$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) e^{-st} dt$$

و با تغییر متغیر $-t = u$ به رابطه زیر می رسیم

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{su} du = X(-s)$$

مثال (۶-۲۳): دو نمودار صفر و قطب در شکل زیر رسم شده اند. تعیین کنید کدامیک از آنها احتمالا

مربوط به تابع زوج و کدامیک مربوط به تابع فرد (در حوزه زمان) است.



شکل (۶-۲۳) نمودارهای صفر و قطب مربوط به مثال ۶-۲۳

حل: در مورد تابع زوج چون $X(s) = X(-s)$ است و چون در مورد شکل (a)، $X(s) = X(-s)$ است

بنابراین شکل (a) می تواند بیانگر یک تابع زوج باشد. لازم به ذکر است که در مورد سیگنال فرد داریم.

$$x(t) = -x(-t) \Rightarrow X(s) = -X(-s)$$

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها

بنابراین در مورد سیگنال فرد نیز تقارن نسبت به هر دو محور حقیقی و موهومی در مورد محل صفرها و قطب ها نیز وجود دارد. پس با مشاهده تقارن نسبت به هر دو محور فقط می توان در مورد احتمال زوج یا فرد بودن قضاوت نمود و به تنهایی و با قطعیت نمی توان در مورد یکی از آنها قضاوت کرد. در مورد شکل (b) همان قضاوت قبلی را داریم. اما یک نتیجه دیگر در این مورد نیز می توان گرفت. چون یک صفر در $s = 0$ داریم معنایش این است که سطح زیر منحنی سیگنال در حوزه زمان صفر است. چون

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 0$$

اما این نتیجه نیز به تنهایی نمی تواند برای قضاوت در مورد زوج یا فرد بودن کافی باشد. چون سطح زیر منحنی هردو نوع سیگنال می تواند صفر شود. به عنوان مثال دو سیگنال نشان داده شده در شکل (۳۳-۶) هردو دارای یک صفر در مبدا هستند در حالی که یکی زوج و دیگری فرد است.



شکل ۳۳-۶ دو سیگنال زوج و فرد که هر دو دارای یک صفر در مبدا (صفحه S) هستند.

مثال (۲۴-۶): ثابت کنید.

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

حل: اگر فرض کنیم $x(t) = 0$ برای $t < 0$ یا $x(t) = x(t)u(t)$ باشد. با بسط $x(t)$ به سری تیلور در حول $t = 0^+$ داریم.

$$x(t) = [x(0^+) + x'(0^+)t + \frac{x''(0^+)}{2}t^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(0^+)}{n!}t^n + \dots]u(t)$$

که تبدیل آن بصورت زیر است.

$$X(s) = [\frac{x(0^+)}{s} + \frac{x'(0^+)}{s^2} + \frac{x''(0^+)}{s^3} + \dots + \frac{x^{(n)}(0^+)}{s^{n+1}} + \dots]$$

بنابراین

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(0^+)$$

مثال (۲۵-۶): با توجه به مثال (۲۴-۶) مقدار $x(0^+)$ را برای تبدیل های زیر بیابید.

$$X(s) = \frac{1}{s+2} \quad \text{الف)}$$

$$X(s) = \frac{2s+1}{(s+2)(s+3)} \quad \text{ب)}$$

حل: الف) با توجه به قضیه مقدار اولیه داریم.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s+2} = 1$$

فصل ششم: تبدیل لاپلاس

(ب)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(2s+1)}{(s+2)(s+3)} = 2$$

مثال (۶-۲۶): یک سیگنال حقیقی مفروض مانند $x(t)$ را در نظر گرفته و ثابت کنید که رابطه زیر در مورد تبدیل لاپلاس آن صادق است.

$$X(s) = X^*(s^*)$$

حل: با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس داریم.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

بنابراین

$$X^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-s^*t} dt$$

و چون $x(t) = x^*(t)$

$$X^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-s^*t} dt$$

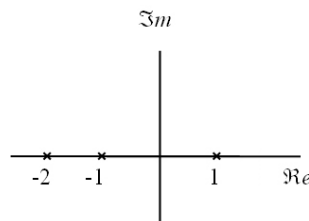
و نهایتاً

$$X^*(s^*) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(s^*)^*t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = X(s)$$

مثال (۶-۲۷): با توجه به مثال (۶-۲۹) ثابت کنید که صفرها و قطبهای تبدیل یک سیگنال حقیقی باید نسبت به محور σ قرینه باشند.

حل: چون $X(s) = X^*(s^*)$ بنابراین اگر $(s_z)s_p$ یک قطب (صفر) تبدیل باشد، لازم است حتماً $(s_z^*)s_p^*$ نیز یک قطب (صفر) تبدیل باشد، بنابراین قطبها (صفرها) همواره بصورت زوج مختلط s_p, s_p^* و s_z, s_z^* وجود دارند.

مثال (۶-۲۸): نمودار صفر و قطب زیر را در نظر بگیرید و تمام نواحی همگرایی ممکنه را برای آن رسم کنید و تعیین کنید کدامیک از این نواحی می توانند مبین یک سیستم پایدار، سیستم علی و یا سیستم پایدار علی باشند.



شکل (۶-۳۴) نمودار صفر و قطب مربوط به مثال ۶-۲۸

حل: نواحی همگرایی ممکنه بصورت زیر هستند.

(الف)

$$\text{Re}[s] < -2$$

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

این ناحیه همگرایی مربوط به یک سیستم غیر علی و ناپایدار می باشد. غیر علی بخاطر چپ‌رو بودن سیگنال، و ناپایدار بخاطر عدم وجود محور $j\omega$ در ناحیه همگرایی.
(ب)

$$-2 < \Re[s] < -1$$

این ناحیه همگرایی مربوط به یک سیستم غیر علی و ناپایدار است. دلیل غیر علی بودن بخاطر دو طرفه بودن سیگنال است و دلیل ناپایداری مانند حالت (الف) است.
(ج)

$$-1 < \Re[s] < 1$$

این ناحیه همگرایی مربوط به یک سیستم غیر علی ولی پایدار است. دلیل غیر علی بودن مانند حالت (الف) است و دلیل پایداری وجود محور $j\omega$ در ناحیه همگرایی می باشد.
(د)

$$\Re[s] > 1$$

این ناحیه همگرایی مبین یک سیستم ناپایدار است چون شامل محور $j\omega$ نیست و می تواند مربوط به یک سیستم علی باشد (البته نه لزوما) چون مبین یک سیگنال راست‌رو می باشد.
لازم به ذکر است که تمام سیستم‌های علی دارای پاسخ ضربه راست‌رو و محدود به ناحیه $t > 0$ هستند. در حالیکه لزوما همه سیگنال‌های راست‌رو نمی توانند مبین پاسخ ضربه سیستم‌های علی باشند.

مثال (۶-۲۹): سیستمی با پاسخ ضربه زیر مفروض است.

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

پاسخ این سیستم به ورودی $x(t) = e^{2t}$ را بیابید.

حل: ابتدا تبدیل لاپلاس $h(t)$ را می یابیم.

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

در اینجا لازم به ذکر است که تبدیل لاپلاس $x(t)$ وجود ندارد. بنابراین نمی توان پاسخ را از حاصلضرب تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه و ورودی بدست آورد. اما با توجه به تعریف کانولوشن در متن درس ثابت شد که پاسخ سیستم LTI به ورودی به صورت $e^{s_0 t}$ برابر است با

$$y(t) = H(s_0)e^{s_0 t}$$

بنابراین در اینجا بسادگی می توان پاسخ را بدست آورد.

$$y(t) = H(2)e^{2t} = \frac{1}{1+2}e^{2t} = \frac{1}{3}e^{2t}$$

مثال (۶-۳۰): یک سیستم LTI علی با پاسخ ضربه زیر مفروض است.

$$h(t) = e^{-t}u(t) + \delta(t)$$

فصل ششم: تبدیل لاپلاس

مطلوبست معکوس سیستم فوق اگر فرض کنیم معکوس آن علی باشد.

حل: طبق تعریف سیستم معکوس داریم.

$$h(t) * h_i(t) = \delta(t)$$

بنابراین با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین داریم.

$$H(s)H_i(s) = 1$$

و یا

$$H_i(s) = \frac{1}{H(s)}$$

بنابراین چون

$$H(s) = \frac{1}{s+1} + 1 = \frac{s+2}{s+1}$$

برای سیستم معکوس داریم.

$$H_i(s) = \frac{s+1}{s+2}$$

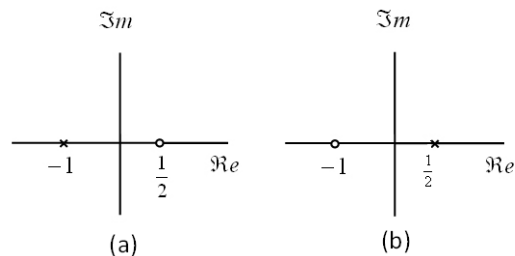
و یا

$$H_i(s) = \frac{s+2}{s+2} - \frac{1}{s+2} = 1 - \frac{1}{s+2}$$

و در حوزه زمان

$$h_i(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$$

مثال (۳۱-۶): نمودار صفر و قطب یک سیستم LTI علی و پایدار در زیر رسم شده است.



شکل (۳۵-۶) نمودار صفر و قطب (a) یک سیستم LTI علی و پایدار (b) معکوس سیستم

مطلوبست رسم نمودار صفر و قطب برای سیستم معکوس و تعیین ناحیه همگرایی اگر فرض کنیم

سیستم معکوس پایدار باشد.

حل: چون ارتباط تبدیل لاپلاس سیستم و معکوس آن به صورت زیر است.

$$H(s) = \frac{1}{H_i(s)}$$

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

بنابراین صفرهای سیستم اصلی منطبق بر قطب سیستم معکوس و قطب‌های سیستم اصلی منطبق بر صفر سیستم معکوس خواهند بود؛ بنابراین نمودار صفر و قطب سیستم معکوس بصورت شکل (۶-۳۵) است.

و ناحیه همگرایی سیستم معکوس بدلیل پایداری باید شامل محور $j\omega$ شود.

$$\operatorname{Re}[s] < \frac{1}{2}$$

مثال (۶-۳۲): طبق تعریف سیستمی کمینه فاز^۱ است که خود و معکوس آن علی و پایدار باشند. ثابت کنید که تمام قطب‌ها و صفرهای سیستم کمینه فاز باید در سمت چپ محور $j\omega$ قرار گرفته باشند. حل: اولاً جهت اینکه سیستم اصلی علی و پایدار باشد لازم است تمام قطب‌های آن در سمت چپ محور $j\omega$ قرار داشته باشند. اما با توجه به آنچه در مثال قبلی توضیح داده شد محل صفرها و قطب‌های سیستم اصلی در سیستم معکوس جابجا می‌شوند. بنابراین جهت اطمینان از علی و پایدار بودن سیستم معکوس لازم است محل صفرهای سیستم اصلی نیز در سمت چپ محور $j\omega$ قرار داشته باشند.

مثال (۶-۳۳): تعیین کنید کدامیک از عبارات زیر صحیح و کدامیک غلط هستند.

الف) تمام قطب‌های یک سیستم پایدار در سمت چپ محور $j\omega$ قرار دارند.

ب) اگر تعداد قطب‌های تابع تبدیل بیش از صفرهای آن باشند و همچنین اگر سیستم علی باشد در آنصورت پاسخ پله در $t = 0$ پیوسته است.

حل: الف) غلط است چون شرط پایداری وجود محور $j\omega$ در ناحیه همگرایی می‌باشد. بنابراین یک سیستم پایدار می‌تواند قطب‌هایی در سمت راست محور $j\omega$ داشته باشد ولی هنوز هم ناحیه همگرایی شامل محور $j\omega$ باشد (پاسخ ضربه سیستم چپ‌رو باشد). در حقیقت برای سیستم پایدار و علی لازم است که تمام قطب‌ها در سمت چپ محور $j\omega$ قرار گیرند.

ب) صحیح است. چون با توجه به اینکه تعداد قطب‌ها بیش از تعداد صفرها است، پس در $H(s)$ درجه مخرج از درجه صورت بزرگتر است.

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

بنابراین مطمئن هستیم که نمی‌توان $H(s)$ را بصورت مجموع یک عدد ثابت و یک کسر که درجه صورت از درجه مخرج کوچکتر است نوشت و به همین دلیل پاسخ ضربه نمی‌تواند شامل ضربه باشد و چون سیستم علی است پس

$$h(t) = 0 \quad t < 0$$

اما پاسخ پله برابر است با انتگرال پاسخ ضربه از $-\infty$ تا لحظه t ، بنابراین در حوزه لاپلاس می‌توان تبدیل پاسخ پله را برحسب تبدیل پاسخ ضربه بصورت زیر نوشت.

¹ Minimum phase

فصل ششم: تبدیل لاپلاس

$$S(s) = \frac{H(s)}{s}$$

بنابراین طبق قضیه مقدار اولیه داریم.

$$s(t = 0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sS(s)$$

و یا

$$S(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{N(s)}{D(s)}$$

و با توجه به اینکه درجه صورت از مخرج کمتر است داریم.

$$s(t = 0^+) = 0$$

بنابراین پاسخ پله در $t = 0^-$ و $t = 0^+$ برابر است.

مثال (۶-۳۴): یک سیستم LTI که توسط معادله دیفرانسیل زیر مشخص می شود را در نظر بگیرید.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

الف) تابع تبدیل سیستم را بیابید.

ب) پاسخ ضربه سیستم را برای هر یک از حالات زیر بدست آورید.

i) سیستم علی است.

ii) سیستم پایدار است.

iii) سیستم غیر علی و ناپایدار است.

حل: الف) با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف رابطه داریم.

$$s^2 Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s)$$

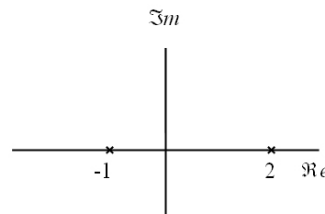
بنابراین

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 - s - 2}$$

و یا

$$H(s) = \frac{-\frac{1}{3}}{s+1} + \frac{\frac{1}{3}}{s-2}$$

ب) با رسم نمودار صفر و قطب سه حالت برای $h(t)$ متصور است.



شکل (۶-۳۴) نمودار صفر و قطب سیستم مورد بحث در مثال ۶-۳۴

i) سیستم علی و ناپایدار دارای ناحیه همگرایی بصورت زیر است.

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

$$\Re[s] > 2$$

که پاسخ ضربه آن برابر است با مجموع دو پاسخ ضربه راست‌رو

$$h(t) = \left(-\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}\right)u(t)$$

(ii) سیستم پایدار و غیر علی که دارای ناحیه همگرایی بصورت زیر است.

$$-1 < \Re[s] < 2$$

پاسخ ضربه این سیستم از مجموع دو پاسخ ضربه علی و غیر علی بدست می‌آید.

$$h(t) = \left(-\frac{1}{3}e^{-t}u(t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(-t)\right)$$

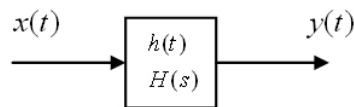
(iii) سیستم ناپایدار و غیر علی که دارای ناحیه همگرایی بصورت زیر است.

$$\Re[s] > -1$$

پاسخ ضربه این سیستم از مجموع دو پاسخ ضربه غیر علی بدست می‌آید.

$$h(t) = \left(\frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{2t}\right)u(-t)$$

مثال (۳۵-۶): یک سیستم LTI را با اطلاعات زیر در نظر بگیرید.



شکل (۳۷-۶) مربوط به مثال ۳۵-۶

$$X(s) = \frac{s+2}{s-2}$$

$$x(t) = 0, t > 0$$

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

مطلوبست.

الف) $H(s)$ و تعیین ناحیه همگرایی.

ب) $h(t)$.

حل: الف) تبدیل لاپلاس $y(t)$ بصورت زیر است.

$$Y(s) = \frac{2}{3} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{3} \frac{1}{s+1}$$

و یا

$$Y(s) = \frac{s}{(s+1)(s-2)}$$

بنابراین

فصل ششم: تبدیل لاپلاس

$$H(s) = \frac{s}{\frac{(s+1)(s-2)}{(s+2)} \cdot (s-2)} = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

این تابع انتقال دارای دو قطب در $s = -1$ و $s = -2$ است. اما چون $y(t)$ محدود است لازم است سیستم پایدار باشد. ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس $y(t)$ بصورت $-1 < \Re[s] < 2$ است. با این ترتیب با توجه به چپ رو بودن $x(t)$ و اینکه $X(s)$ فقط یک قطب دارد پس ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس $x(t)$ به صورت $\Re[s] < 2$ خواهد شد. بنابراین ناحیه همگرایی سیستم باید بصورت $-1 < \Re[s]$ شود تا هم شامل محور $j\omega$ باشد و هم فصل مشترک آن با ناحیه همگرایی $X(s)$ برابر ناحیه همگرایی $Y(s)$ شود. بنابراین ناحیه همگرایی تابع انتقال $H(s)$ بصورت زیر است.

$$\Re[s] > -1$$

ب) بسادگی با بسط $H(s)$ به کسور جزئی داریم.

$$H(s) = \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1}$$

و یا

$$h(t) = (2e^{-2t} - e^{-t})u(t)$$

مثال (۶-۳۶): یک سیستم علی با پاسخ ضربه $h(t)$ دارای خواص زیر است.

i) هنگامی که ورودی سیستم بصورت $x(t) = e^{2t}$ است، خروجی آن بصورت $y(t) = \frac{1}{6}e^{2t}$ می باشد.

ii) پاسخ ضربه آن در معادله دیفرانسیل زیر صادق است.

$$\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t) = e^{-4t}u(t) + bu(t)$$

که در آن b یک عدد نامعلوم است. مطلوبست تابع تبدیل سیستم.

حل: ابتدا از طرفین معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس می گیریم و نتیجه زیر را بدست می آوریم

$$sH(s) + 2H(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{b}{s}$$

نتیجتاً

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)} + \frac{b}{s(s+2)}$$

و اما اکنون باید مجهول b را بدست آورد. با توجه به تعریف سیستم خطی چون پاسخ سیستم خطی به ورودی $e^{s_0 t}$ برابر $H(s_0)e^{s_0 t}$ می باشد می توان نوشت.

$$H(2) = \frac{1}{6}$$

بنابراین

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

$$H(2) = \frac{1}{4 \times 6} + \frac{b}{2 \times 4} = \frac{1}{6}$$

بنابراین

$$b = 1$$

در نتیجه

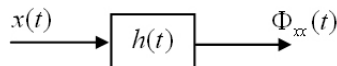
$$H(s) = \frac{2s + 4}{s(s + 2)(s + 4)} = \frac{2}{s(s + 4)}$$

مثال (۳۷-۶): تابع همبستگی $\Phi_{xx}(\tau)$ مربوط به سیگنال $x(t)$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Phi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t - \tau)dt$$

سیستمی را بیابید که اگر ورودی آن $x(t)$ باشد خروجی آن $\Phi_{xx}(\tau)$ باشد.

حل:



شکل (۳۸-۶) سیستمی با ورودی $x(t)$ و خروجی $\Phi_{xx}(\tau)$

جهت یافتن چنین سیستمی ساده‌تر است که ارتباط سیگنال‌های مذکور را در حوزه لاپلاس بیابیم.

برای این کار از طرفین رابطه فوق تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

$$\int_{\tau=-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)x(t - \tau) e^{-s\tau} dt d\tau$$

طرف اول مساوی تبدیل لاپلاس $\Phi_{xx}(\tau)$ است که آنرا با $\Psi_{xx}(s)$ نشان می‌دهیم و با تغییر ترتیب

انتگرالگیری در طرف دوم به رابطه زیر می‌رسیم.

$$\Psi_{xx}(s) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(t - \tau) e^{-s\tau} d\tau \right] dt$$

عبارت داخل کروشه مساوی $X(-s)e^{-st}$ می‌باشد، بنابراین

$$\Psi_{xx}(s) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) X(-s) e^{-st} dt$$

و یا

$$\Psi_{xx}(s) = X(s)X(-s)$$

بنابراین سیستم مطلوب باید دارای تابع انتقالی بصورت $X(-s)$ باشد.

$$H(s) = X(-s)$$

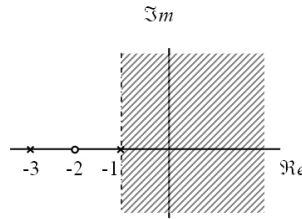
و در حوزه زمان

$$h(t) = x(-t)$$

مثال (۳۸-۶): اگر $x(t)$ دارای نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی بصورت شکل (۳۹-۶) باشد،

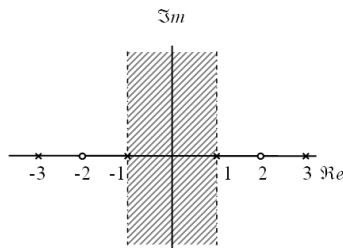
نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی مربوط به $\Phi_{xx}(\tau)$ را رسم کنید.

فصل ششم: تبدیل لاپلاس



شکل (۳۹-۶) ناحیه همگرایی و نمودار صفر و قطب تبدیل $x(t)$

حل: چون -1 و -3 قطب های $X(s)$ هستند، 1 و 3 قطب های $X(-s)$ می باشند؛ و چون -2 صفر $X(s)$ است، 2 صفر $X(-s)$ می باشد. بنابراین نمودار صفر و قطب مربوط به حاصلضرب $X(s)X(-s)$ بصورت زیر است.

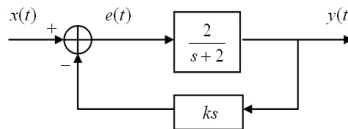


شکل (۴۰-۶) ناحیه همگرایی و نمودار صفر و قطب تبدیل $\Phi_{xx}(\tau)$

با توجه اینکه $x(t)$ راست رو است $x(-t)$ چپ رو است و ناحیه همگرایی آن $\Re[s] < 1$ می باشد. بنابراین ناحیه همگرایی حاصلضرب $X(s)X(-s)$ فصل مشترک دو ناحیه همگرایی مربوط به $x(t)$ و $x(-t)$ می باشد و یا

$$-1 < \Re[s] < 1$$

مثال (۳۹-۶): سیستم علی زیر را در نظر بگیرید



شکل (۴۱-۶) سیستم علی مربوط به مثال ۳۹-۶

تعیین کنید این سیستم به ازاء چه مقادیری از k پایدار است.

حل: ابتدا لازم است تابع انتقال کل سیستم را بدست آورد.

$$E(s) = X(s) - ksY(s)$$

و

$$Y(s) = E(s) \frac{2}{s+2}$$

نتیجتاً

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

$$Y(s)(s+2) = 2X(s) - 2ksY(s)$$

و یا

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{s+2+2ks} = \frac{2}{(1+2k)s+2}$$

$$H(s) = \frac{\frac{2}{1+2k}}{s + \frac{2}{1+2k}}$$

چون سیستم علی است شرط لازم و کافی جهت پایداری این است که تمام قطب‌ها در سمت چپ محور $j\omega$ قرار داشته باشند. بنابراین لازم است که

$$\frac{2}{1+2k} > 0$$

و یا

$$1+2k < 2$$

در نتیجه

$$\frac{1}{2} > k$$

مثال ۴۰-۶: مطلوبست $X(s)$ اگر $x(t) = \frac{-1}{t}u(t)$.

حل: می دانیم

$$-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds}$$

بنابراین با توجه به صورت مسئله داریم:

$$-tx(t) = u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} = \frac{dX(s)}{ds} \Rightarrow X(s) = Ln(s) ; \operatorname{Re}(s) > 0$$

مثال (۴۱-۶): مطلوبست $x(t)$ اگر $X(s) = \frac{e^s}{s+1}$ با ناحیه همگرایی $\operatorname{Re}\{s\} > -1$.

حل: از قبل می دانیم که

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\varphi} \frac{1}{s+1} \quad \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

بنابراین با انتقال در حوزه زمان داریم:

$$e^{-(t-1)}u(t-1) \xleftrightarrow{\varphi} \frac{e^s}{s+1} \quad \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

همانطور که دیدیم، همواره تلفیق خواص مختلف راهگشای محاسبات جالب در مورد تبدیل لاپلاس خواهد بود.

مسائل فصل ششم

فصل ششم: تبدیل لاپلاس

۶-۱ تبدیل لاپلاس هر یک از سیگنال های زیر را یافته و ناحیه همگرایی اش را معلوم کنید.

الف) $t^2 e^{-at} u(t)$ و $a < 0$

ب) $\cos(\omega_0 t + \varphi) u(t)$

ج) $\sin(\omega_0 t + \varphi) u(t)$

د) $t^2 e^{-a|t|}$ و $a > 0$

هـ) $tu(t)$

و) $u(t)$

ز) $\delta(at + b)$ و a و b اعداد ثابت.

ح) $\sum_{i=0}^{\infty} k_i e^{-s_i t} u(t)$ و $s_i > 0$

ط) $\frac{d\delta(t)}{dt} = \delta'(t)$

ی) $\frac{k}{k+t^2}$ و k عدد ثابت مثبت.

ک) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta(t + kT)$ و a_k عدد ثابت.

ل) $[1 - e^{-t} + 3 + e^{-2t}] u(t)$

م) $t \cos(t) u(t)$

ن) $t \sin(t) u(t)$

س) $t^2 \cos(2t) u(t)$

ع) $t^2 u(t - 2)$

ف) $te^{-at} u(t + 1)$

۶-۲ پاسخ ضربه یک سیستم LTI بصورت زیر است.

$$h(t) = te^{-t} u(t)$$

پاسخ این سیستم را به ورودی های زیر بیابید.

الف) $x(t) = u(t)$

ب) $x(t) = e^{2t}$

ج) $x(t) = \cos(2t)$

د) $x(t) = 1$

۶-۳ ورودی یک سیستم مفروض به صورت زیر است.

$$x(t) = e^{2t}$$

اگر خروجی آن به صورت زیر باشد.

$$y(t) = \frac{2}{3} e^{2t} + e^{-2t}$$

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

تعیین کنید آیا سیستم فوق خطی است یا خیر.

۴-۶ ورودی یک سیستم مفروض به صورت زیر است.

$$x(t) = e^{-t} \cos 2t$$

اگر خروجی آن به صورت زیر باشد.

$$y(t) = e^{-t} \sin 2t$$

تعیین کنید آیا سیستم فوق خطی است یا خیر.

۵-۶ ورودی یک سیستم مفروض بصورت زیر است.

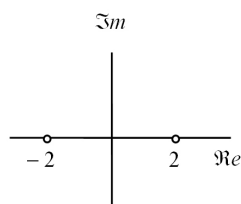
$$x(t) = e^t u(t)$$

اگر خروجی آن بصورت زیر باشد.

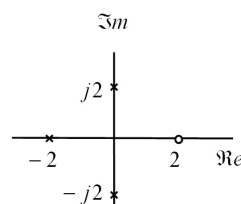
$$y(t) = 2e^t u(t)$$

تعیین کنید آیا سیستم فوق خطی است یا خیر.

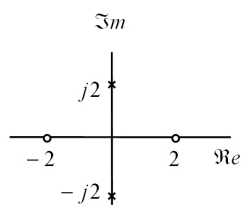
۶-۶ تعیین کنید کدامیک از نمودارهای صفر و قطب زیر می‌توانند احتمالاً ممین یک سیگنال زوج، فرد و یا نه زوج و نه فرد باشد.



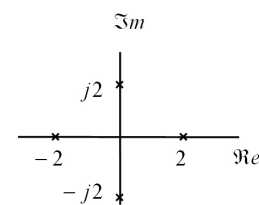
(a)



(b)



(c)

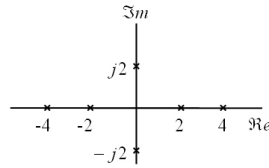


(d)

شکل (۴۲-۶) مربوط به مسئله ۶-۶

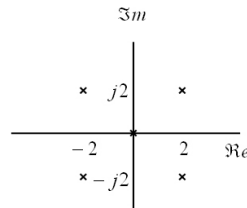
۷-۶ نمودار صفر و قطب زیر مربوط به یک سیگنال چپ‌رو می‌باشد؛ تعیین کنید که آیا تبدیل فوریه این سیگنال وجود دارد یا خیر.

فصل ششم: تبدیل لاپلاس



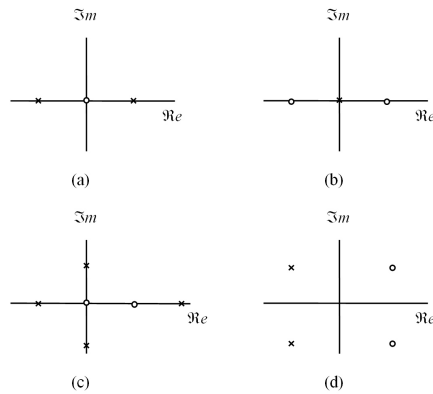
شکل (۴۳-۶) مربوط به مسئله ۷-۶

۸-۶ نمودار صفر و قطب زیر مربوط به یک سیستم علی می باشد؛ تعیین کنید که آیا این سیستم پایدار است یا خیر.



شکل (۴۴-۶) مربوط به مسئله ۸-۶

۹-۶ کدامیک از نمودارهای صفر و قطب زیر می تواند مربوط به یک سیستم علی پایدار باشد.



شکل (۴۵-۶) مربوط به مسئله ۹-۶

۱۰-۶ تبدیل لاپلاس معکوس را بیابید.

الف) $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ و $\Re[s] < -2$

ب) $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ و $\Re[s] > -1$

ج) $X(s) = \frac{s^2}{(s+1)(s-1)}$ و $\Re[s] > 1$

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

$$X(s) = \frac{s^2 + s - 1}{(s+1)^2} \text{ و } \Re[s] < -1 \quad (\text{د})$$

$$X(s) = \frac{e^{-2s}}{(s-1)^2} \text{ و } \Re[s] > 1 \quad (\text{ه})$$

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 1} \text{ و } \Re[s] < -1 \quad (\text{و})$$

$$X(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} \text{ و } \Re[s] > -1 \quad (\text{ز})$$

$$X(s) = e^s \frac{1}{s+1} + e^{-s} \frac{1}{s-1} \text{ و } \Re[s] < -1 \quad (\text{ح})$$

$$X(s) = e^s \frac{1}{s+1} + e^{-s} \frac{1}{s-1} \text{ و } \Re[s] < -1 \quad (\text{ط})$$

$$X(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \text{ و } \Re[s] < -3 \quad (\text{ی})$$

$$a > 0 \text{ و } X(s) = \frac{s+a}{s-a} \text{ و } \Re[s] < a \quad (\text{ک})$$

$$a > 0 \text{ و } X(s) = \frac{s-a}{s+a} \text{ و } \Re[s] > -a \quad (\text{ل})$$

$$\text{م) تمام صفحه } s = ROC \text{ و } X(s) = \sum_{i=0}^N k_i e^{-a_i s} \text{ و } a_i, k_i \text{ عدد ثابت}$$

$$X(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s-1} e^{2s} \text{ و } \Re[s] > 1 \quad (\text{ن})$$

$$X(s) = 1 + \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1} \text{ و } \Re[s] < 0 \quad (\text{س})$$

$$X(s) = 1 + \frac{s^2 + 1}{s^2 - 1} \text{ و } \Re[s] < -1 \quad (\text{ع})$$

$$X(s) = \frac{s^2}{s^2 + 4} \text{ و } \Re[s] < 0 \quad (\text{ف})$$

$$X(s) = \frac{s}{s^2 - 4} + 1 \text{ و } \Re[s] < -2 \quad (\text{ص})$$

$$X(s) = \frac{s^2 - 1}{(s+1+j)(s+1-j)} \text{ و } \Re[s] < -1 \quad (\text{ق})$$

$$X(s) = \frac{2s-1}{(s^2+1)(s^2-1)s} \text{ و } \Re[s] > 1 \quad (\text{ر})$$

۶-۱۱) $H(s)$ مبین تابع انتقال یک سیستم علی و پایدار است. ورودی این سیستم شامل سه عبارت است. یکی از آنها یک ضربه و دیگری یک نمایی مختلط است. اما از جمله سوم ورودی اطلاعی در دست نداریم. خروجی این سیستم به ورودی فوق الذکر برابر است با

فصل ششم: تبدیل لاپلاس

$$y(t) = -6e^{-t}u(t) + \frac{4}{34}e^{4t}\cos(3t) - \frac{18}{34}e^{4t}\sin(3t) + \delta(t)$$

مطلوبست تعیین $H(s)$.

۱۲-۶ سیگنال $y(t) = e^{-2t}u(t)$ خروجی یک سیستم LTI علی با تابع انتقالی بصورت زیر می باشد.

$$H(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

الف) تمام ورودی های ممکن را بیابید.

ب) کدامیک از این ورودی ها بطور مطلق انتگرالپذیر است؛ یعنی

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

۱۳-۶ سیستمی پایدار با تابع انتقال زیر مفروض است.

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2-3s+2}$$

خروجی این سیستم را به ورودی زیر بیابید.

$$x(t) = e^{-|t|} \quad -\infty < t < \infty$$

۱۴-۶ خروجی سیستم مذکور در مساله ۱۳-۶ را به ورودی زیر بیابید.

$$x(t) = e^{-|t|} \cos t \quad -\infty < t < \infty$$

۱۵-۶ خروجی یک سیستم علی با تابع انتقال

$$H(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

به ورودی مفروض $x(t)$ بصورت زیر است.

$$y(t) = e^{-2t}u(t)$$

اگر ورودی این سیستم $\frac{dx(t)}{dt} + \frac{d^3x(t)}{dt^3}$ باشد مطلوبست خروجی سیستم.

۱۶-۶ یک سیستم LTI علی که توسط معادله دیفرانسیل زیر توصیف می شود را در نظر بگیرید.

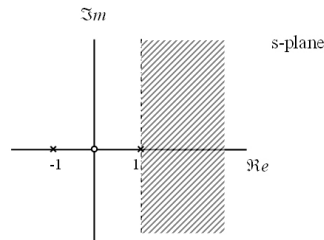
$$\frac{dy^2(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

اگر ورودی سیستم بصورت $\delta'(t) + \delta(t) + u(t)$ باشد مطلوبست خروجی سیستم.

۱۷-۶ نمودار صفر و قطب و ناحیه همگرایی شکل (۴۶-۶) مربوط به یک سیستم با تابع تبدیل کسری

می باشد. پاسخ ضربه را بیابید. اگر پاسخ سیستم به ورودی e^{2t} برابر e^{2t} باشد.

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم‌ها



شکل (۴۶-۶) مربوط به مسئله ۱۷-۶

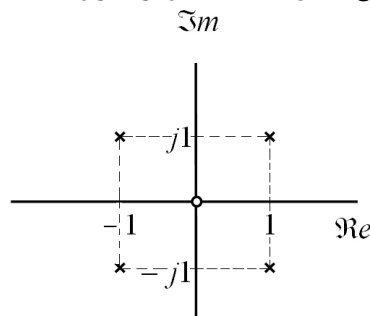
۱۸-۶ پاسخ ضربه یک سیستم LTI علی بصورت زیر است.

$$h(t) = (1 - e^{-t} - te^{-t})u(t)$$

مطلوبست خروجی سیستم اگر ورودی آن بصورت زیر باشد.

$$x(t) = (2 - 3e^{-t} + e^{-3t})u(t)$$

۱۹-۶ یک سیستم LTI دارای تابع تبدیل $H(s)$ با نمودار صفر و قطب بصورت زیر است.



شکل (۴۷-۶) مربوط به مسئله ۱۹-۶

تمام حالت‌های ممکنه $h(t)$ را یافته و خواص سیستم را در هر یک از حالات بیان کنید.

۲۰-۶ اگر $\chi(s)$ مبین تبدیل لاپلاس یکطرفه $x(t)$ باشد تبدیل لاپلاس یکطرفه هر یک از سیگنال‌های زیر را بیابید.

الف) $x(t - t_0)$

ب) $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

ج) $x(t + t_0)$

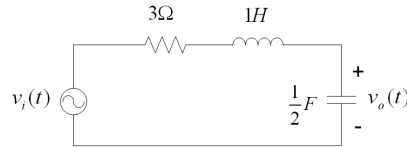
د) $\frac{dx(t)}{dt}$

ه) $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$

ز) $\frac{d^3x(t)}{dt^3}$

فصل ششم: تبدیل لاپلاس

۲۱-۶ معادله دیفرانسیل مربوط کننده $v_o(t)$ به $v_i(t)$ در مدار زیر را بیابید و با فرض $v_i(t) = e^{-3t}u(t)$ خروجی را برای $t > 0$ بیابید.

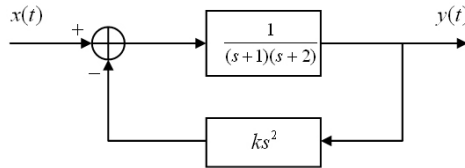


شکل (۴۸-۶) مربوط به مسئله ۲۱-۶

۲۲-۶ تابع انتقال فیلتر باتروث را پیدا کنید. اگر بدانیم این فیلتر علی و پایدار است و

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\omega/j\omega_c)^{2N}}$$

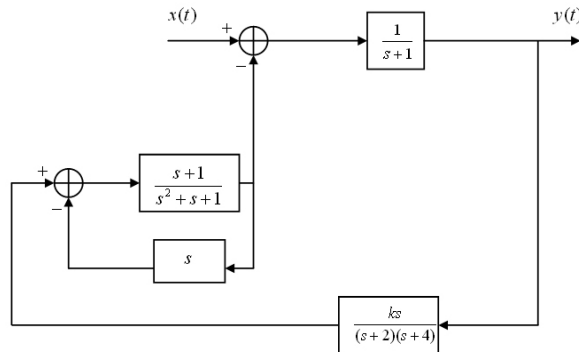
۲۳-۶ سیستم علی زیر را در نظر بگیرید.



شکل (۴۹-۶) مربوط به مسئله ۲۳-۶

تعیین کنید این سیستم به ازاء چه مقادیری از k احتمالا پایدار می شود.

۲۴-۶ سیستم علی زیر را از لحاظ پایداری به ازاء مقادیر مختلف k مورد بررسی قرار دهید.



شکل (۵۰-۶) مربوط به مسئله ۲۴-۶