

فصل ۵

نظریه نمونه برداری

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها

مقدمه

در حالت‌های خاص اطلاعات یک سیگنال پیوسته زمانی (باند محدود) را می‌توان بطور کامل بوسیله اطلاعات موجود در نمونه‌هایی با فاصله زمانی مشخص از سیگنال برداشت کرد. این نتیجه از نظریه نمونه‌برداری بدست آمده است. این نمونه‌ها باید دارای یک حداکثر فاصله زمانی از هم باشند و اگر فاصله نمونه‌ها از هم بیشتر شود دیگر نمی‌توان سیگنال را از روی نمونه‌ها بازسازی کرد. این حقیقت که می‌توان یک سیگنال پیوسته را بطور کامل بوسیله نمونه‌های مجزا نمایش داد، باعث شده است تا ارتباط عمیقی میان سیگنال‌های پیوسته و گسسته زمانی بوجود آید. در بسیاری از حالات پردازش سیگنال گسسته زمانی بسیار ساده‌تر و قابل انعطاف‌تر است. چون این نوع پردازش‌ها را می‌توان بوسیله الگوریتم‌های خاصی با استفاده از کامپیوتر با سرعت‌های بسیار بالا انجام داد. هم اکنون پردازش سیگنال‌های صوتی و تصویری توسط همین روش صورت می‌گیرد. در این فصل ضمن بررسی انواع روش‌های نمونه‌برداری از سیگنال‌های پیوسته زمانی بخشی را به طریقه تبدیل نمونه‌های پیوسته زمان به دنباله گسسته زمان اختصاص خواهیم داد و نهایتاً پردازش گسسته زمان بر روی سیگنال‌های پیوسته زمان را مورد بحث قرار خواهیم داد.

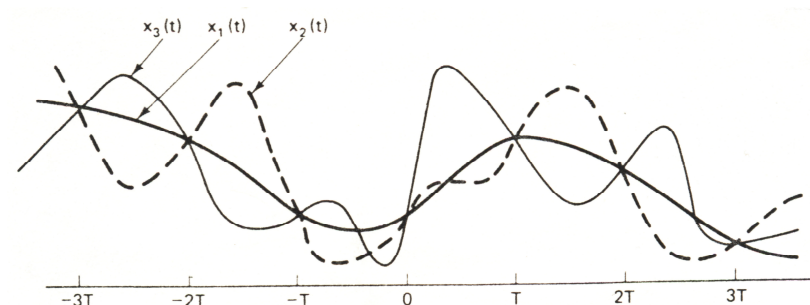
۵-۱ نمایش سیگنال پیوسته زمانی بوسیله نمونه‌های آن (نظریه نمونه‌برداری)

در حالت کلی نباید انتظار داشت که نمونه‌برداری از سیگنال‌های مختلف در فواصل زمانی مشخص تمام اطلاعات موجود در سیگنال‌های مورد نظر را به ما بدهد. بعنوان مثال سه سیگنال $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ و $x_3(t)$ را در نظر بگیرید. تمام نمونه‌های این سیگنال‌ها در لحظات kT با هم برابرند یعنی

$$x_1(kT) = x_2(kT) = x_3(kT)$$

بنابراین در حالت کلی بی‌نهایت شکل موج وجود دارند که می‌توانند یکدسته نمونه‌های مشخص را بوجود آورند. اما اگر سیگنال باند محدود باشد و نمونه‌ها به اندازه کافی به هم نزدیک برداشته شوند یکدسته نمونه مشخص فقط یک سیگنال را برای ما بوجود خواهد آورد که این امر بصورت ریاضی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. بطور حسی واضح است که اگر سرعت نمونه‌برداری از سیگنال، از سرعت تغییرات سیگنال خیلی بیشتر باشد، نمونه‌های حاصل بخوبی بیانگر نحوه تغییرات سیگنال خواهند بود. در این صورت به این نوع نمونه‌برداری، نمونه‌برداری موفقیت آمیز گفته می‌شود. اکنون لازم است رابطه میان سرعت نمونه‌برداری و سرعت تغییرات سیگنال را جهت نمونه‌برداری موفقیت آمیز مورد بررسی قرار دهیم. این رابطه در مورد انواع روش‌های نمونه‌برداری یکسان است و ما جهت سادگی آن را در مورد نمونه‌برداری ایده‌آل یا نمونه‌برداری به کمک قطار ضربه بدست می‌آوریم.

فصل پنجم: نظریه نمونه برداری

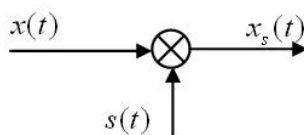


شکل (۱-۵): سه سیگنال پیوسته زمانی که دارای مقادیر یکسانی در لحظات kT هستند.

مزیت نمونه برداری ایده آل در سادگی محاسبات ریاضی می باشد. ولی همانطور که می دانیم ساخت قطار ضربه که از $-\infty$ شروع شده و تا ∞ ادامه پیدا کند غیر ممکن است، حتی ساخت تقریبی آن نیز بدلیل وجود دوره نامحدود غیر ممکن می باشد.

۵-۲ نمونه برداری با قطار ضربه از سیگنال های باند محدود (حالت ایده آل)

در بعضی موارد قطار ضربه^۱ به نام تابع نمونه بردار نیز معروف می باشد و دلیل آن هم قبلاً گفته شد. اکنون نشان خواهیم داد که جهت نمونه برداری موفقیت آمیز باید دوره تناوب نمونه برداری (T_s) با بالاترین مؤلفه فرکانسی سیگنال باند محدود رابطه خاصی داشته باشد. در اینجا تذکر این نکته فوق العاده ضروری است که نمونه برداری فقط در مورد سیگنال های باند محدود می تواند موفقیت آمیز باشد و از سیگنال هایی که از لحاظ فرکانسی دارای باند نامحدود هستند نمی توان بطور موفقیت آمیز نمونه برداری کرد. سیستم نمونه برداری به کمک قطار ضربه بصورت زیر می باشد.



شکل (۲-۵): سیستم نمونه برداری به کمک قطار ضربه از یک سیگنال باند محدود

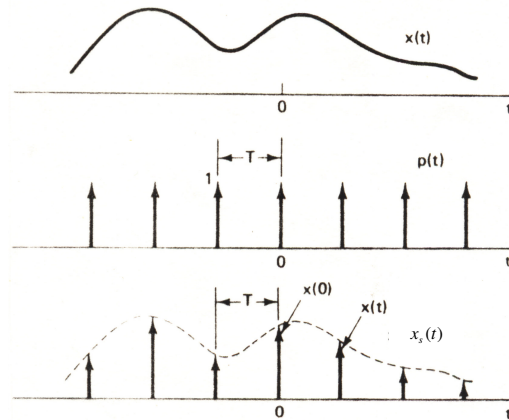
که در آن $s(t)$ یک قطار ضربه با دوره تناوب T_s می باشد.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \quad (1-5)$$

همان گونه که بعداً توضیح خواهیم داد سیستم شکل (۲-۵) در حقیقت مبین نوعی مدولاتور با حاملی بصورت قطار ضربه می باشد. یک نمونه از شکل سیگنال $x(t)$ و نمونه های آن در شکل (۳-۵) نمایش داده شده اند.

¹ Impulse Train

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها



شکل (۳-۵): مدولاسیون دامنه با قطار ضربه

در این صورت داریم.

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \quad (۲-۵)$$

و یا

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad (۳-۵)$$

و با توجه به خاصیت مدولاسیون که در فصل سوم مورد بحث قرار گرفت می توان ارتباط طیفی سیگنال ها را بصورت رابطه (۴-۵) نوشت.

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(\omega) \times S(\omega)] \quad (۴-۵)$$

قبلاً داشتیم که تبدیل فوری قطار ضربه خود نیز در حوزه فرکانس یک قطار ضربه به صورت زیر است.

$$S(\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \quad (۵-۵)$$

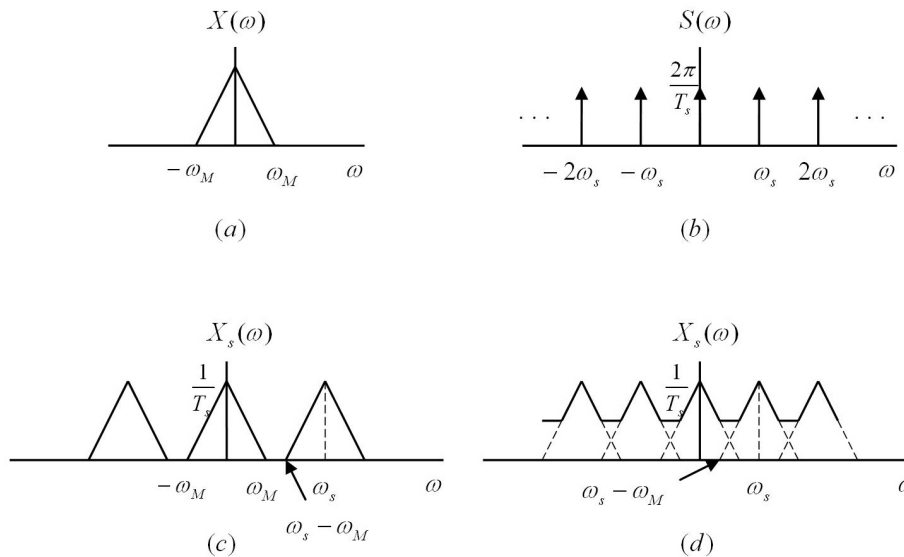
که در آن $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ می باشد. با قرار دادن (۵-۵) در (۴-۵) به (۶-۵) خواهیم رسید.

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{K=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) \quad (۶-۵)$$

این رابطه به ما می گوید که $X_s(\omega)$ یک تابع تناوبی است که شامل مجموع انتقال هایی به اندازه ω_s از $X(\omega)$ با دامنه $\frac{1}{T_s}$ در حوزه فرکانس می باشد. این مطلب در شکل (c-۴-۵) و (d-۴-۵) به ازاء دو

مقدار متفاوت از ω_s نمایش داده شده است.

فصل پنجم: نظریه نمونه برداری



شکل (۵-۴): تأثیر نمونه برداری بر طیف سیگنال‌ها (a) طیف سیگنال اصلی (b) طیف سیگنال نمونه بردار (c) طیف

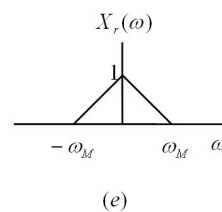
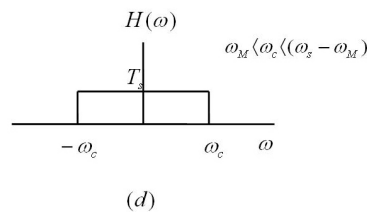
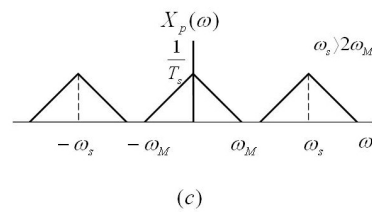
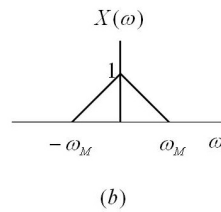
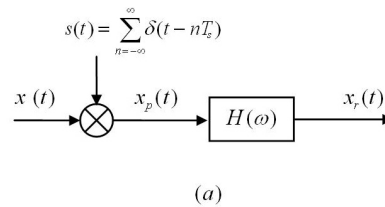
سیگنال نمونه برداری شده با $\omega_s > 2\omega_M$ (d) همان طیف با $\omega_s < 2\omega_M$

از شکل (۵-۴) پیدا است که اگر $\omega_M < \omega_s - \omega_M$ یا $\omega_s > 2\omega_M$ در این صورت هیچ گونه تداخلی بین طیف‌های فرکانسی انتقال داده شده بوجود نخواهد آمد، و مانند این است که $X(\omega)$ در هر فاصله با دوره تناوب ω_s در حوزه فرکانس تکرار شود.

نتیجتاً اگر $\omega_s > 2\omega_M$ باشد، می‌توان $x(t)$ را بطور کامل از $x_s(t)$ بوسیله عبور نمونه های $x_s(t)$ از یک فیلتر پایین‌گذر با بهره T_s بازسازی نمود. البته باید فرکانس قطع فیلتر بزرگتر از ω_M و کوچکتر از $\omega_s - \omega_M$ باشد (به شکل (۵-۵) توجه کنید).

اما اگر $\omega_s < 2\omega_M$ باشد در این صورت تداخل ایجاد می‌شود. [شکل (۵-۴) (d)] و امکان بازسازی $x(t)$ از روی نمونه‌ها وجود ندارد. این بدین مفهوم است که نمونه‌ها به اندازه کافی به هم نزدیک نیستند. نحوه بازسازی $x(t)$ از روی $x_s(t)$ در شکل (۵-۵) نمایش داده شده است.

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها



شکل (۵-۵): بازسازی دقیق سیگنال از روی نمونه‌های آن بوسیله فیلتر پایین‌گذر

بنابراین اکنون ارتباط مطلوب میان سرعت نمونه‌برداری و بالاترین مؤلفه فرکانسی موجود در طیف سیگنال باند محدود جهت نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز را می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$\omega_s \geq 2\omega_M \quad (۷-۵)$$

و یا

$$\frac{2\pi}{T_s} \geq 2\omega_M \quad (۸-۵)$$

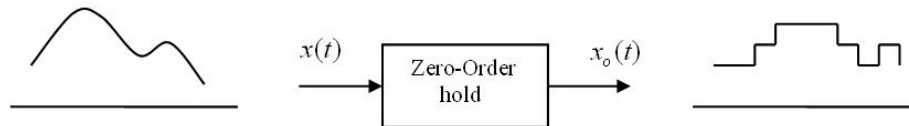
رابطه (۷-۵) به نرخ نایکوئیست^۱ جهت نمونه‌برداری موفقیت‌آمیز از سیگنال‌های باند محدود معروف است. از همین جا نیز می‌توان پی به این حقیقت برد که در مورد سیگنال‌هایی که در حوزه فرکانس دارای باند نامحدود هستند هرگز نمی‌توان نامساوی (۷-۵) یا شرط نایکوئیست را ارضاء نمود، چون در مورد این‌گونه سیگنال‌ها ω_M بسمت بی‌نهایت میل می‌نماید.

^۱ Nyquist Rate

فصل پنجم: نظریه نمونه برداری

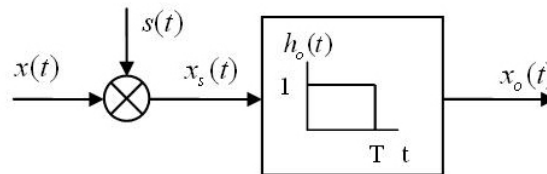
۵-۳ نمونه برداری به کمک مدار نگه دارنده مرتبه صفر^۱

طبق نظریه نمونه برداری می توان یک سیگنال باند محدود را بطور کامل توسط نمونه ها بازسازی نمود. اگرچه این نتیجه حاصلی از نمونه برداری ایده آل می باشد، اما در موارد عملی نیز دقیقاً صادق است. یکی از سیستم هایی که در عمل جهت نمونه برداری مورد استفاده قرار می گیرد سیستمی است که در آن مقدار نمونه های برداشته شده در هر لحظه تا زمان نمونه بعدی نگه داشته می شوند. نمونه ای از سیگنال و نمونه های آن در شکل (۵-۶) نمایش داده می شود.

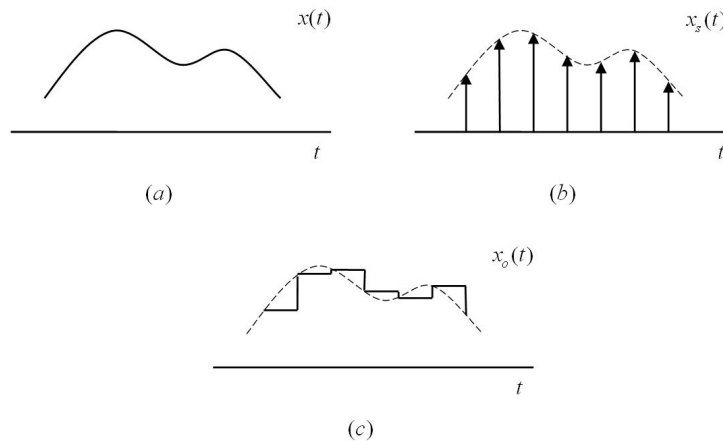


شکل (۵-۶): نمونه برداری به کمک مدار Z.O.H

در این نوع نمونه برداری بازسازی $x(t)$ از $x_o(t)$ بوسیله یک مدار LPF که در باند عبور دارای بهره متغیر است امکان پذیر است. برای روشن تر شدن موضوع ابتدا توجه کنید که $x_o(t)$ یا خروجی مدار ZOH را می توان بوسیله سیستم زیر نیز تولید کرد.



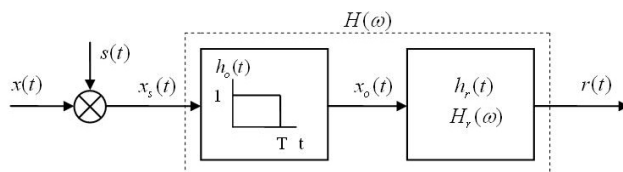
شکل (۵-۷): سیستم معادل جهت نمونه برداری Z.O.H سیگنالهای هر قسمت در شکل ۵-۸ نمایش داده شده اند.



شکل (۵-۸): توصیف دقیق ZOH بصورت نمونه برداری با قطار ضربه به همراه کانولوشن با پالس مربعی.

^۱ Zero Order Hold (Z.O.H)

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها



شکل (۹-۵): اتصال سری مدار ZOH به همراه مدار بازساز

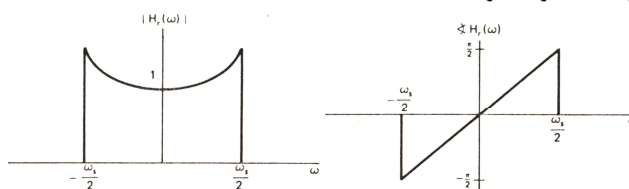
مراحل تولید نمونه‌های سیگنال به روش ZOH بدین صورت است که ابتدا به روش نمونه‌برداری ایده‌آل $x_s(t)$ را بوجود می‌آوریم و بعد سیگنال $x_s(t)$ را از یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h_0(t)$ عبور می‌دهیم. خروجی همان $x_0(t)$ خواهد بود. اما برای بازسازی سیگنال $x(t)$ از روی $x_s(t)$ قبلاً گفتیم که باید $x_s(t)$ را از یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل عبور داد. بنابراین با توجه به شکل (۹-۵) باید $H_r(\omega)$ بگونه‌ای باشد که حاصلضرب $H_0(\omega)H_r(\omega)$ معادل یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل گردد. به عبارت دیگر چون

$$H_0(\omega) = e^{-\frac{j\omega T}{2}} \left(2 \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega} \right) \quad (۹-۵)$$

لازم است که

$$H_r(\omega) = \frac{e^{\frac{j\omega T}{2}} H(\omega)}{\left[\frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right]} \quad (۱۰-۵)$$

در این صورت اگر $H(\omega)$ مشخصه یک فیلتر LPF باشد، خروجی سیستم، $H_r(\omega)$ همان $x(t)$ منتها با تغییر اندکی در دامنه خواهد بود.



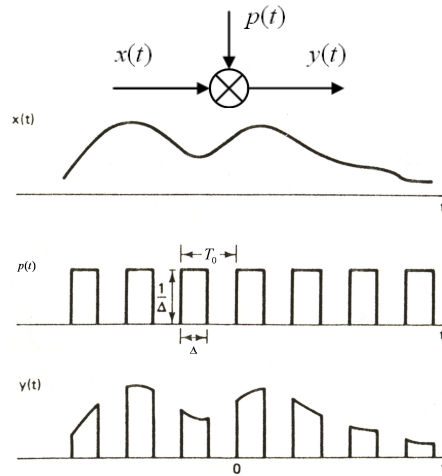
شکل (۱۰-۵): دامنه و فاز مربوط به فیلتر بازسازی برای ZOH

۴-۵ نمونه‌برداری بوسیله پالس

روش دیگری که بطور عملی جهت نمونه‌برداری از سیگنالهای پیوسته مورد استفاده قرار می‌گیرد نمونه‌برداری به کمک قطار پالس^۱ (بجای قطار ضربه) می‌باشد. در این صورت مدار نمونه‌برداری و نمایش سیگنالها بصورت زیر است.

^۱ Pulse Train

فصل پنجم: نظریه نمونه برداری



شکل (۱۱-۵): نمونه برداری به کمک قطار پالس، هنگامی که $\Delta \rightarrow 0$ ، $p(t)$ بسمت قطار ضربه میل می کند. تبدیل فوریه $p(t)$ به این صورت است.

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (۱۱-۵)$$

که در آن a_k ضرایب سری فوریه $p(t)$ می باشند و $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

ضرایب a_k به صورت زیر بدست می آیند.

(۱۲-۵)

$$a_k = \int_0^{\Delta} \frac{1}{\Delta T_0} e^{-j\frac{2\pi}{T_0} t} dt = -\frac{1}{j\frac{2k\Delta\pi}{T_0}} e^{-j\frac{2\pi}{T_0} t} \Big|_0^{\Delta} = -\frac{1}{j2k\Delta\pi} [e^{-j\frac{\pi}{T_0} k\Delta} - 1] = e^{-j\frac{\pi}{T_0} k\Delta} \frac{1}{k\Delta\pi} \sin\left(\frac{\pi}{T_0} k\Delta\right), \quad k \neq 0$$

و برای $k=0$ خواهیم داشت.

$$a_k = \frac{1}{T_0} \quad (۱۳-۵)$$

بنابراین داریم.

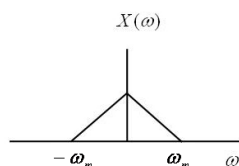
$$P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{k\Delta} e^{-j\frac{\pi}{T_0} k\Delta} \sin\left(\frac{\pi}{T_0} k\Delta\right) \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T_0}\right) \quad (۱۴-۵)$$

و در نتیجه

$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k\Delta\pi} e^{-j\frac{\pi}{T_0} k\Delta} \sin\left(\frac{\pi}{T_0} k\Delta\right) X\left(\omega - \frac{2k\pi}{T_0}\right) \quad (۱۵-۵)$$

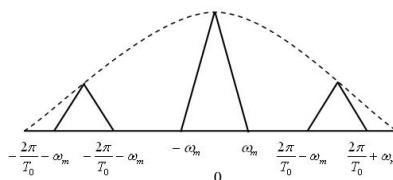
اگر فرض کنیم $x(t)$ دارای طیفی بصورت شکل ۱۲-۵ باشد.

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها



شکل (۵-۱۲): طیف سیگنال $x(t)$

در آن صورت طیف $Y(\omega)$ بصورت شکل ۵-۱۳ خواهد شد.



شکل (۵-۱۳): طیف سیگنال نمونه برداری شده

با توجه به طیف $Y(\omega)$ باز هم می بینیم شرط نایکوئیست جهت نمونه برداری موفقیت آمیز در مورد نمونه برداری با قطار پالس نیز صادق است. بنابراین اگر

$$\frac{2\pi}{T_0} \geq 2\omega_m \quad (۵-۱۶)$$

در آن صورت به کمک یک فیلتر پایین گذر می توان دوباره سیگنال اصلی را بازسازی کرد.

۵-۵ درون یابی^۱ یا بازسازی سیگنال از روی نمونه های برداشته شده

درون یابی روشی است که برای بازسازی سیگنال چه بطور دقیق و چه بطور تقریبی از روی نمونه ها بکار برده می شود. یکی از ساده ترین روش های درون یابی استفاده از مدار ZOH می باشد. یکی دیگر از روش های بازسازی روش بازسازی خطی^۲ می باشد که در آن قله های هر نمونه بوسیله یک خط راست به نمونه بعدی متصل می شود.



شکل (۵-۱۴): بازسازی خطی بین نقاط نمونه خط چین سیگنال اصلی

قبلاً گفتیم که اگر سیگنال باند محدود و فاصله نمونه ها به اندازه کافی کم باشد، در آن صورت می توان با عبور نمونه ها از یک فیلتر پایین گذر ایده آل بطور کامل سیگنال را بازسازی کرد. نحوه عمل بازسازی سیگنال از روی نمونه ها که توسط فیلتر پایین گذر ایده آل صورت می پذیرد را در حوزه زمان بهتر می توان توضیح داد. سیستم شکل (۵-۱۵) را در نظر بگیرید. خروجی مدار LPF از رابطه زیر بدست می آید.

^۱ Interpolation

^۲ Linear Interpolation

فصل پنجم: نظریه نمونه برداری

$$x_r(t) = x_s(t) * h(t)$$



شکل (۵-۱۵): مدار بازسازی ایده آل

اما می دانیم که

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

بنابراین

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) h(t - nT_s) \quad (۵-۱۸)$$

معادله فوق یک فرمول بازسازی است. اما برای فیلتر LPF با فرکانس قطع ω_c و بهره T_s پاسخ ضربه بصورت زیر است.

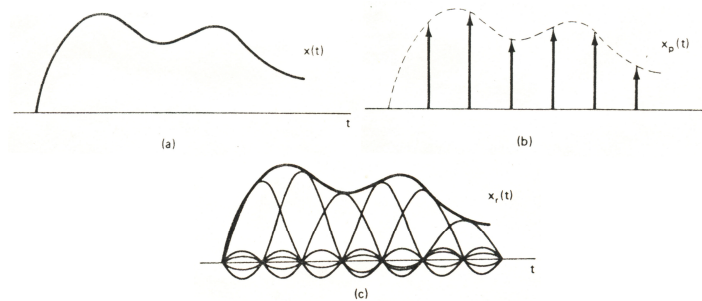
$$h(t) = T_s \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right) \quad (۵-۱۹)$$

با جایگذاری رابطه (۵-۱۹) در (۵-۱۸) رابطه (۵-۲۰) بدست می آید.

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) T_s \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sinc}\left[\frac{\omega_c(t - nT_s)}{\pi}\right] \quad (۵-۲۰)$$

عمل بازسازی سیگنال با فرمول فوق وقتی که $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$ است در شکل (۵-۱۶) نمایش داده شده

است.



شکل (۵-۱۶): بازسازی ایده آل سیگنال باند محدود به کمک توابع Sinc

رابطه (۵-۲۰) حاوی نکات جالبی می باشد. یکی از آنها این است که هر سیگنال باند محدود $x(t)$ را می توان بصورت مجموعه ای از بی نهایت توابع Sinc (فرمول (۵-۲۰)) نمایش داد مشروط بر آنکه $\omega_s \geq 2\omega_c$ باشد که در آن ω_c بیشترین مولفه فرکانسی موجود در سیگنال می باشد.

مثال (۵-۱): ثابت کنید.

$$\cos(\omega_c t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sinc}\left[\frac{t - nT_s}{T_s}\right] \quad (۵-۲۱)$$

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها

$$T_s = \frac{\pi}{\omega_c}$$

حل: با توجه به رابطه (۲۰-۵) جهت نمونه برداری از سیگنال باند محدود $\cos \omega_c t$ کافی است فاصله نمونه ها کمتر یا مساوی $\frac{\pi}{\omega_c}$ باشد. در این صورت رابطه (۲۰-۵) صادق است و با توجه به رابطه زیر

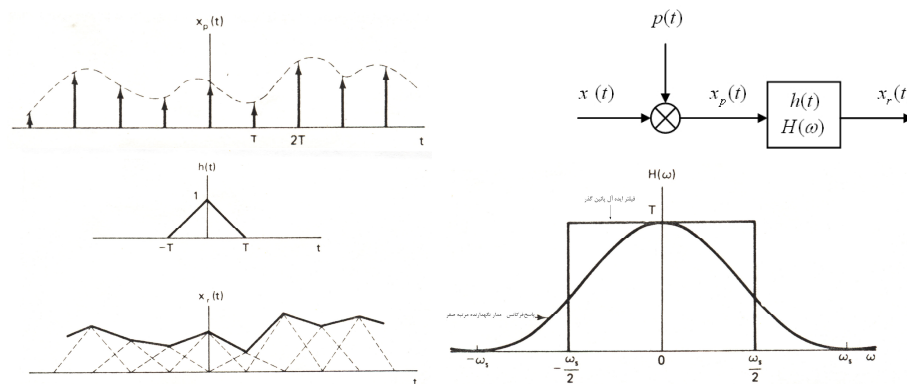
$$\cos(\omega_c n T_s) = \cos(n\pi) = (-1)^n \quad (22-5)$$

رابطه (۲۱-۵) خود به خود ثابت است.

توجه شود که رابطه ای به شکل (۲۱-۵) به کمک روش های معمولی بسادگی قابل اثبات نمی باشد ولی همانطور که دیدیم به کمک نظریه نمونه برداری به سادگی به اثبات می رسد.

بازسازی به روش فوق را معمولاً بازسازی باند محدود می نامند چون اگر $x(t)$ باند محدود باشد به کمک روش فوق می توان دقیقاً $x(t)$ را بازسازی نمود. اما چون ساخت فیلتر پایین گذر ایده آل غیر ممکن است، معمولاً به روش های ساده تری از فیلتر کردن (یا به عبارت معادل بازسازی کردن) دست می یازند که یکی از آنها استفاده از مدار ZOH با پاسخ ضربه $h_0(t)$ است که پاسخ فرکانسی آن در شکل (۱۰-۵) رسم شده است. بنابراین $h_0(t)$ یک تقریب برای فیلتر LPF ایده آل است. همانطور که از شکل (۱۰-۵) پیدا است تقریب فوق چندان تقریب خوبی نیست ولی در بسیاری از موارد همین تقریب نیز کافی است.

اما همانگونه که گفتیم روش دیگری که اغلب مورد استفاده قرار می گیرد بازسازی خطی است که در آن سیگنال بازسازی شده پیوسته ولی مشتقاتش پیوسته نیستند. در بعضی موارد سیستم بازساز خطی به سیستم نگهدارنده مرتبه اول^۱ معروف است. روش فوق در شکل (۱۷-۵) نمایش داده شده است.



شکل (۱۷-۵): بازسازی خطی (نگهدار مرتبه اول) بصورت نمونه برداری قطار ضربه که با پاسخ ضربه مثلثی کانوال شده است.

¹ First Order Hold (FOH)

فصل پنجم: نظریه نمونه برداری

به سادگی می توان تابع تبدیل $H(\omega)$ را بدست آورد.

$$H(\omega) = \left(\frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2 \quad (23-5)$$

که در شکل (۱۷-۵) دامنه $H(\omega)$ را بر روی دامنه فیلتر پایین گذر ایده آل منطبق کرده ایم و می بینیم که شباهت آن به فیلتر LPF بیشتر از شباهت $H_0(\omega)$ به فیلتر LPF می باشد.

۵-۶ اثر تداخل^۱

در قسمت های گذشته فرض ما بر این بود که فرکانس نمونه برداری به اندازه کافی بزرگ است، یعنی $\omega_s > 2\omega_m$ است، در نتیجه پدیده تداخل رخ نمی دهد. هنگامی که $\omega_s < 2\omega_m$ باشد در آن صورت نمی توان $x(t)$ را از روی سیگنال $x_s(t)$ ساخت، چون در حوزه فرکانس پدیده تداخل به وجود می آید. اما به هرحال سیگنال $x_r(t)$ در نقاط نمونه برداری مساوی $x(t)$ است. به عبارت دیگر بدون توجه به مقدار ω_s داریم.

$$x_r(nT) = x(nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (24-5)$$

بعنوان مثال فرض کنید $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ است. در شکل (۱۸-۵) رسم شده است. در این شکل ضربه در فرکانس های مثبت و منفی جهت تشخیص به دو صورت رسم شده است. $X_s(\omega)$ و طیف سیگنال نمونه برداری شده را در نظر می گیریم و توجه خود را به تغییرات ω_0 و فرکانس نمونه برداری ω_s معطوف می کنیم. در شکل (۱۸-۵) $X_s(\omega)$ را برای مقادیر مختلف ω_0 رسم کرده ایم (فرض کرده ایم که ω_s ثابت است). شکل پاسخ فیلتر ایده آل نیز به صورت خط چین نشان داده شده است. دیده می شود که در حالتی که $\omega_0 < \omega_s / 2$ است هیچ گونه تداخلی به وجود نمی آید (شکل های ۱۸-۵، b و c). ولی به ازاء $\omega_0 > \omega_s / 2$ پدیده تداخل در شکل های (d و e) پیدا است. برای هر یک از چهار حالت خروجی فیلتر LPF یا $x_r(t)$ چنین است.

$$\omega_0 = \frac{\omega_s}{6} \text{ و } x_r(t) = \cos \omega_0 t = x(t) \quad (b)$$

$$\omega_0 = \frac{2\omega_s}{6} \text{ و } x_r(t) = \cos \omega_0 t = x(t) \quad (c) \quad (25-5)$$

$$\omega_0 = \frac{4\omega_s}{6} \text{ و } x_r(t) = \cos(\omega_s - \omega_0)t \neq x(t) \quad (d)$$

$$\omega_0 = \frac{5\omega_s}{6} \text{ و } x_r(t) = \cos(\omega_s - \omega_0)t \neq x(t) \quad (e)$$

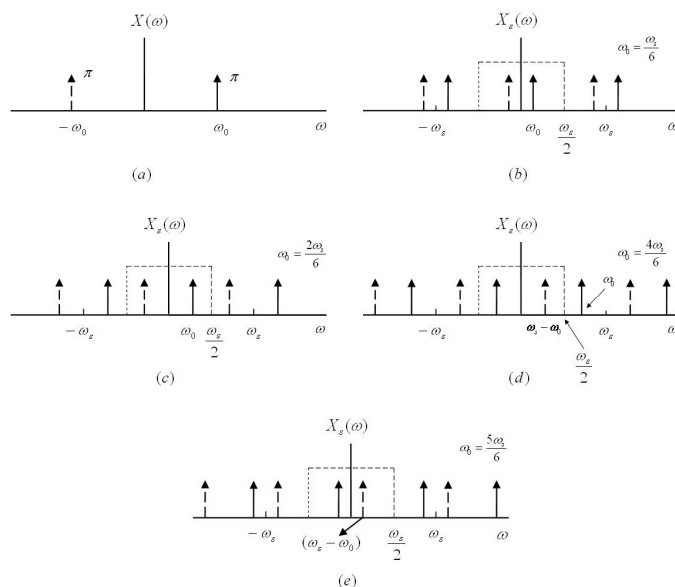
هنگام به وجود آمدن پدیده تداخل فرکانس واقعی ω_0 جای خود را به فرکانس عاریتی (مجازی)^۲ $\omega_s - \omega_0$ می دهد.

^۱ Aliasing

^۲ Virtual Frequency

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها

برای $\frac{\omega_s}{2} < \omega_0 < \omega_s$ با افزایش ω_0 نسبت به ω_s فرکانس خروجی $\omega_s - \omega_0$ کاهش می یابد. هنگامی که $\omega_s = \omega_0$ شود. در آنصورت سیگنال بازسازی شده یک مقدار dc یا ثابت خواهد بود. این حالت مبین این واقعیت است که هنگامی که نمونه برداری یکبار در هر سیکل انجام شود تمام نمونه های برداشته شده دارای دامنه یکسان خواهند بود و به نظر می رسد که هیچ تغییری ندارد یا $\omega_0 = 0$ است. در شکل (۱۸-۵) سیگنال اصلی نمونه برداشته شده و سیگنال بازسازی شده ترسیم شده اند.



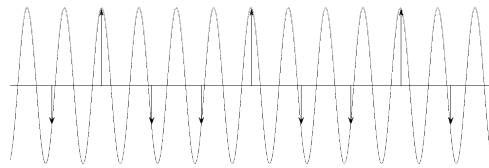
شکل (۱۸-۵): نمایش تأثیر فرکانس های بیشتر و کمتر از فرکانس نمونه برداری درحوزه فرکانس. (a) طیف سیگنال سینوسی اولیه (b,c)

طیف سیگنال نمونه برداری شده با $\omega_s > 2\omega_m$ (e,d) طیف سیگنال نمونه برداری شده با $\omega_s < 2\omega_m$

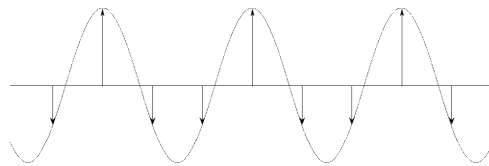
در شکل (۱۹-۵) سیگنال $x(t)$ بصورت خطوط پررنگ رسم شده اند. همچنین نمونه های برداشته شده و سیگنال بازسازی شده از روی نمونه ها باخط چین رسم شده اند. از این شکل ها به خوبی می توان چگونگی بازسازی یا درون یابی را مشاهده کرد. اثرتداخل که باعث انعکاس فرکانس های بالاتر به فرکانس های پایین تر است را نیز می توان در شکل های (c,d) مشاهده کرد. چون در این حالت فرکانس نمونه برداری ω_s از دو برابر فرکانس ω_0 کمتر است ($\omega_s = \frac{6}{5}\omega_0$) و بنابراین سیگنال بازسازی شده دارای فرکانس زیر است.

$$\omega_s - \omega_0 = \frac{6}{5}\omega_0 - \omega_0 = \frac{1}{5}\omega_0 \quad (۲۶-۵)$$

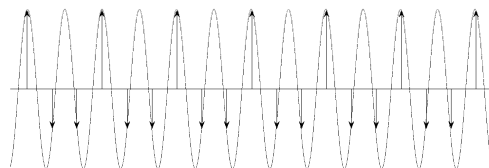
فصل پنجم: نظریه نمونه برداری



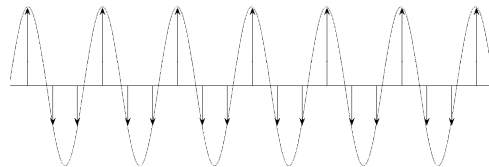
(a) $\omega_s = \frac{3}{4} \omega_0$



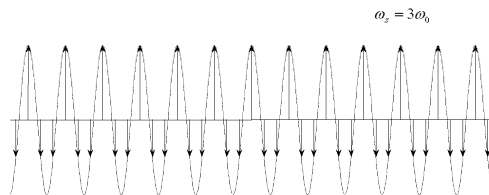
(b)



(c) $\omega_s = \frac{3}{2} \omega_0$



(d)



(e)

شکل (۵-۱۹): تأثیر تداخل روی سیگنال سینوسی برای مقادیر مختلف فرکانس نمونه برداری (a) سیگنال سینوسی اولیه با فرکانس ω_0 و نمونه های گرفته

شده با فرکانس $\omega_s = \frac{3\omega_0}{4}$ (b) سیگنال بازسازی شده از نمونه های گرفته شده از سیگنال اصلی با فرکانس نمونه برداری $\omega_s = \frac{3\omega_0}{4}$ (c) سیگنال

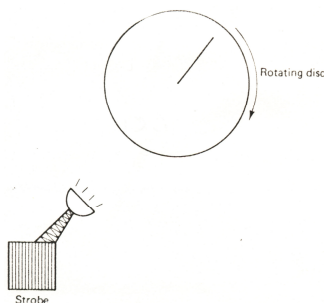
سینوسی اولیه با فرکانس ω_0 و نمونه های گرفته شده با فرکانس $\omega_s = \frac{3\omega_0}{2}$ (d) سیگنال بازسازی شده از نمونه های گرفته شده از سیگنال اصلی با

فرکانس نمونه برداری $\omega_s = \frac{3\omega_0}{2}$ (e) سیگنال بازسازی شده از نمونه های گرفته شده از سیگنال اصلی با فرکانس نمونه برداری $\omega_s = 3\omega_0$

در (b) و (d) پدیده تداخل رخ می دهد در حالی که در (c) و (e) تداخل رخ نمی دهد.

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها

در واقع نمونه برداری آهسته باعث شده است که فرکانس های بالاتر به فرکانس های پایین منعکس شوند. این واقعیت را با آزمایش ساده شکل (۵-۲۰) می توان تحقیق کرد.



شکل (۵-۲۰): چراغ چشمک زن و دیسک چرخان

دیسک با سرعت مشخص در حال گردش است. خطوط شعاعی منفردی که روی آن ترسیم شده است را در نظر بگیرید. چراغی را که با سرعت های مختلف و بطور متناوب روشن و خاموش می شود^۱ را بعنوان سیستم نمونه بردار فرض کنید. هنگامی که فرکانس فلاش خیلی بیشتر از سرعت چرخش دیسک باشد سرعت چرخش صفحه بطور صحیح از چرخش خط شعاعی دیده می شود. هنگامی که سرعت فلاش کمتر و کمتر شود تا جایی که کمتر از دو برابر سرعت چرخش صفحه شود، به نظر می رسد سرعت چرخش صفحه کمتر از مقدار قبلی است (البته با جهت عکس). اگر سرعت فلاش یکبار در هر دور صفحه باشد بنظر می رسد که صفحه ثابت است و چرخشی ندارد.

۵-۷ نمونه برداری در حوزه فرکانس

نظریه نمونه برداری که در قسمت های قبلی این فصل برای حوزه زمان در مورد سیگنال های باند محدود مطرح شد، در حوزه فرکانس بصورت دوگان حوزه زمان قابل تعریف است. عبارت دیگر یک نوع دوگانی بین حوزه زمان و فرکانس در نظریه نمونه برداری مشاهده می گردد. قبلاً دیدیم که جهت نمونه برداری موفقیت آمیز لازم است سیگنال در حوزه فرکانس دارای باند محدود باشد. بنابراین انتظار داریم نمونه برداری در حوزه فرکانس فقط برای سیگنال هایی که در حوزه زمان دارای دوره محدود هستند، موفقیت آمیز باشد. حقیقت امر نیز همین است و نمونه برداری موفقیت آمیز در حوزه فرکانس مستلزم دوره محدود بودن سیگنال در حوزه زمان می باشد.

در این قسمت روش نمونه برداری فرکانسی از یک سیگنال زمان محدود که در حوزه فرکانس نامحدود است را مورد بررسی قرار می دهیم. توجه داشته باشید که بر اساس نظریه نمونه برداری نمی توان از این سیگنال ها در حوزه زمان نمونه برداری کرد چون پهنای باند آنها بی نهایت است برای بررسی مفصل تر این موضوع سیستم نمونه بردار در حوزه فرکانس را بصورت شکل (۵-۲۱) در نظر بگیرید. توجه شود

^۱ Flasher

فصل پنجم: نظریه نمونه برداری

که سیستم ضرب کننده در حقیقت یک ضرب کننده در حوزه فرکانس می باشد که معادل حوزه زمانی آن کانولوشن می باشد.

در اینجا داریم.

$$\bar{X}(\omega) = X(\omega)P(\omega) \quad (27-5)$$

در حوزه زمان داریم.

$$(28-5)$$

$$\bar{x}(t) = x(t) * p(t)$$

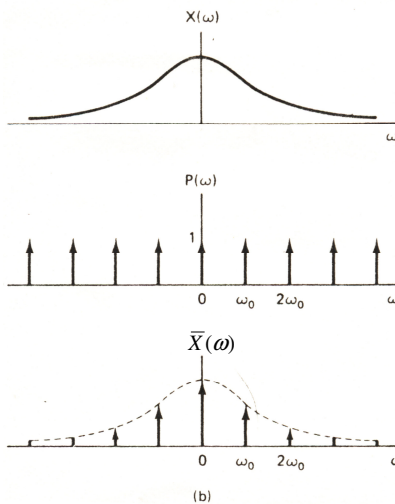
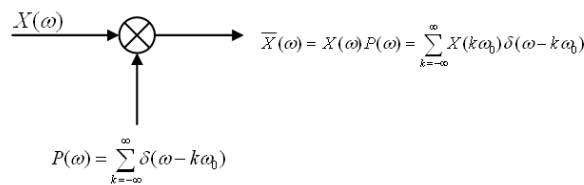
که در آن

$$p(t) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \frac{2\pi}{\omega_0} k) \quad (30-5)$$

بنابراین

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - \frac{2\pi k}{\omega_0}) \quad (31-5)$$

معادله (31-5) دوگان معادله (8-5) است.



شکل (21-5): نمونه برداری به کمک قطار ضربه در حوزه فرکانس (a) سیستم اصلی (b) طیف های مربوط به

$$\bar{X}(\omega) \text{ و } P(\omega) \text{ و } X(\omega)$$

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها

اگر $x(t)$ زمان محدود باشد یعنی

$$x(t) = 0, |t| > T_m \quad (32-5)$$

در این صورت همان گونه که در شکل (22-5) نمایش داده شده است با انتخاب

$$\frac{2\pi}{\omega_0} > 2T_m \quad (33-5)$$

$\bar{x}(t)$ که در معامله (31-5) داده شده است شامل $x(t)$ و انتقال یافته های آن به اندازه $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

می باشد که در حوزه زمان هیچ گونه تداخلی با هم ندارند. در این حالت سیگنال اصلی $x(t)$ و بالطبع تبدیل فوریه آن $X(\omega)$ را می توان با انجام عمل پنجره پایین گذر زمانی¹ از سیگنال $\bar{x}(t)$ جدا کرد

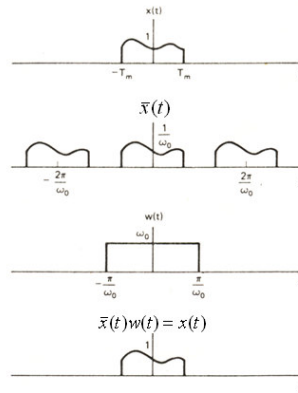
یعنی

$$x(t) = \bar{x}(t)w(t) \quad (34-5)$$

که در آن

$$w(t) = \begin{cases} \omega_0 & |t| \leq \frac{\pi}{\omega_0} \\ 0 & |t| > \frac{\pi}{\omega_0} \end{cases} \quad (35-5)$$

سیگنال های مراحل فوق در شکل (22-5) نمایش داده شده اند.



شکل (22-5): شکل موج حوزه زمانی، مربوط به نمونه برداری حوزه فرکانس

اگر نامساوی (33-5) صادق نباشد در آن صورت نمی توان $x(t)$ را از $\bar{x}(t)$ جدا کرد چون $x(t)$ با انتقال یافته هایش تداخل پیدا می کند این نوع تداخل دوگان تداخل حوزه فرکانس است که قبلاً شرح داده شد.

¹ low-time windowing

فصل پنجم: نظریه نمونه برداری

در مقایسه با آنچه در مورد بازسازی گفتیم می توان گفت عملکرد پنجره پایین گذر زمانی روی سیگنال $\bar{x}(t)$ کار بازسازی روی نمونه های $X(\omega)$ را در حوزه فرکانس انجام می دهد از معامله (۳۴-۵) داریم.

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} [\bar{X}(\omega) * W(\omega)] \quad (۳۶-۵)$$

که در آن

$$\bar{X}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0) \quad (۳۷-۵)$$

و $W(\omega)$ تبدیل فوریه $w(t)$ است. یعنی

$$W(\omega) = 2\pi \text{Sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad (۳۸-۵)$$

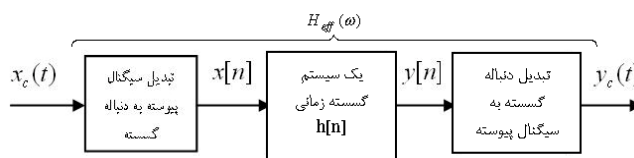
با ترکیب معادلات (۳۶-۵) و (۳۷-۵) داریم.

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) \text{Sinc}\left(\frac{\omega - k\omega_0}{\omega_0}\right) \quad (۳۹-۵)$$

که این معادله نیز دوگان (۲۰-۵) است.

۵-۸ پردازش گسسته زمانی بر روی سیگنال های پیوسته زمانی^۱

در بسیاری از کاربردها بدلیل سادگی پردازش در حوزه گسسته زمانی بهتر است ابتدا سیگنال پیوسته زمانی را به یک سیگنال معادل گسسته زمانی تبدیل نمود و بعد تمام عملیات و پردازش های لازم را روی سیگنال گسسته زمانی انجام داد. این کار توسط نمونه برداری امکان پذیر است. این عملیات را می توان در سه بلوک زیر خلاصه کرد.



شکل (۲۳-۵): پردازش گسسته زمانی بر روی سیگنال های پیوسته زمانی

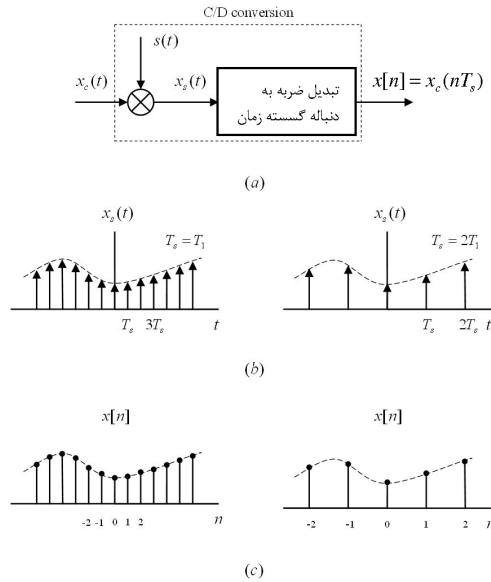
بلوک سوم جهت بازگشت به حوزه پیوسته زمانی لازم است. اساس کار در بلوک اول (C/D) این است که باید رابطه (۴۰-۵) میان نمونه های $x[n]$ و سیگنال $x_c(t)$ برقرار باشد.

$$x[n] = x_c(nT_s) \quad (۴۰-۵)$$

جهت درک بهتر مطلب شایسته است رابطه میان $x_c(t)$ و نمونه هایش را بوسیله یک فرایند نمونه برداری و بدنبال آن یک مدار مبدل ضربه به دنباله نمایش داد. این رابطه بوسیله شکل (۲۴-۵) نمایش داده شده است.

¹ Discrete Time Processing of Continuoses-Time Signal

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها



شکل (۵-۲۴): نمونه برداری با قطار ضربه در اتصال با سیستم مبدل ضربه به دنباله زمانی گسسته (a) نمایش کلی سیستم (b) $x_s(t)$ برای دوسرعت نمونه برداری پوش خط چین $x_c(t)$ را نمایش می دهد. (c) خروجی بصورت دنباله برای دوسرعت مختلف نمونه برداری.

در حوزه فرکانس می توان نوشت.

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(\omega - k\omega_s) \quad (۵-۴۱)$$

و یا در حوزه زمان داریم.

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad (۵-۴۲)$$

که از روی این رابطه (۵-۴۲) می توان نوشت.

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT_s) e^{-jn\omega T_s} \quad (۵-۴۳)$$

از طرفی دیگر خروجی $x[n]$ را در نظر گرفته و تبدیل فوریه اش را می نویسیم.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (۵-۴۴)$$

اکنون اگر بخواهیم $x[n] = x_c(nT)$ شود داریم.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s) e^{-j\Omega n} \quad (۵-۴۵)$$

با مقایسه روابط (۵-۴۵) و (۵-۴۳) داریم.

$$X(\Omega) = X_s\left(\frac{\Omega}{T_s}\right)$$

فصل پنجم: نظریه نمونه برداری

و از طرف دیگر داریم.

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s} X_c(\omega), |\omega| \leq \omega_m \quad (۴۶-۵)$$

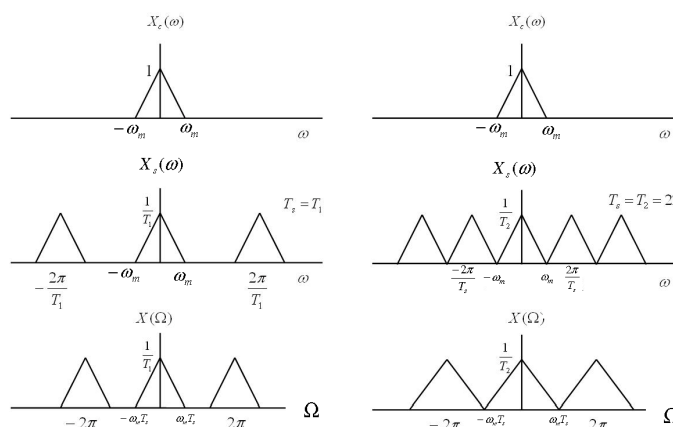
که در آن ω_m بالاترین مؤلفه فرکانسی موجود در X_c است. بنابراین داریم.

$$X(\Omega) = \frac{1}{T_s} X_c\left(\frac{\Omega}{T_s}\right), |\Omega| < \omega_m T_s \quad (۴۷-۵)$$

و یا

$$X(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{\Omega}{T_s} - \frac{2k\pi}{T_s}\right) \quad (۴۸-۵)$$

ارتباط میان $X(\Omega)$ ، $X_s(\omega)$ ، $X_c(\omega)$ در شکل (۲۵-۵) رسم شده است.



شکل (۲۵-۵): ارتباط بین $X_s(\omega)$ ، $X_c(\omega)$ و $X(\Omega)$ برای دو سرعت مختلف نمونه برداری

توجه به این نکته حائز اهمیت است که LTI بودن کل سیستم (۲۷-۵) بستگی به دو عامل زیر دارد.

- ۱- LTI بودن سیستم گسسته زمان که جهت پردازش سیگنال پیوسته زمان بکار می رود.
- ۲- باند محدود بودن سیگنال ورودی و بالا بودن نرخ نمونه برداری به اندازه ای که از تداخل جلوگیری کند.

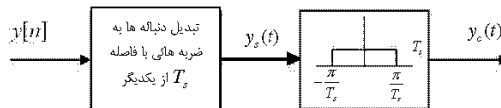
توجه شود که در شکل (۲۵-۵) T_1 و T_2 (نرخ های نمونه برداری) بگونه ای هستند که شرط نایکوئیست را ارضا می نمایند یعنی $\frac{2\pi}{T_1} \geq 2\omega_m$ و $\frac{2\pi}{T_2} \geq 2\omega_m$. در غیر این صورت تداخل حاصله مانع از موفقیت

عمل نمونه برداری می شد.

با توجه به شکل (۲۴-۵) می بینیم که انتخاب T_s تأثیری در فاصله نمونه ها در حوزه گسسته زمانی ندارد و این در واقع نمایانگر یک نرمالیزاسیون برحسب T_s (تقسیم محور زمان بر T_s) در انتقال از حوزه پیوسته به گسسته زمانی می باشد. این نرمالیزاسیون بر حسب T_s در حوزه زمان معادل ضرب حوزه فرکانس در ضریب نرمالیزاسیون T_s می باشد، یعنی $\Omega = T_s \omega$.

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها

اکنون مناسب است که بلوک D/C که کارش تبدیل نمونه‌ها به یک سیگنال پیوسته زمانی است را بررسی کنیم. در این بلوک ابتدا باید دنباله‌ها را با توجه به دانستن نرخ نمونه‌برداری T_s به ضربه‌هایی با فاصله T_s از یکدیگر تبدیل نمود و سپس با قراردادن یک LPF می‌توان $y_c(t)$ را بازسازی کرد. (به شکل (۲۶-۵) توجه کنید).



شکل (۲۶-۵): بلوک D/C

در اینجا داریم.

$$y_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \delta(t - nT_s) \quad (۴۹-۵)$$

و بعد از LPF داریم.

$$Y_c(\omega) = Y_s(\omega) H_r(\omega) \quad (۵۰-۵)$$

$$y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] h_r(t - nT_s) \quad (۵۱-۵)$$

که در آن

$$h_r(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)}{\frac{\pi t}{T_s}} \quad (۵۲-۵)$$

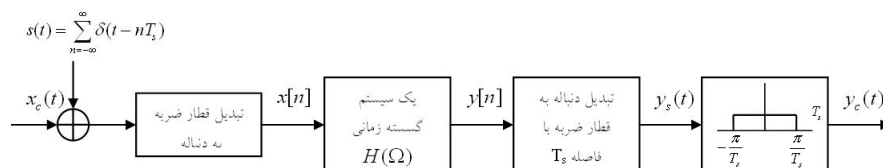
بنابراین می‌توان نوشت.

$$y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \frac{\sin[\pi(t - nT_s)/T_s]}{\pi(t - nT_s)/T_s} \quad (۵۳-۵)$$

چون $h_r(0) = 1$ و $h_r(mT_s) = 0$ برای $m \neq 0$ پس

$$y_c(mT_s) = y[m] \quad (۵۴-۵)$$

البته بشرطی که $Y_c(\omega) = 0$ برای $|\omega| \geq \frac{\pi}{T_s}$ باشد. اکنون سیستم کلی که بیانگر یک پردازش گسسته زمانی $H(\Omega)$ بر روی سیگنال پیوسته زمانی $x_c(t)$ می‌باشد را می‌توان بصورت زیر رسم کرد.



شکل (۲۷-۵): سیستم کلی که نمایشگر یک پردازش گسسته زمانی $H(\Omega)$ بر روی سیگنال پیوسته زمانی $x_c(t)$ می‌باشد.

فصل پنجم: نظریه نمونه برداری

حال سوال اینست که یک پردازشگر گسسته زمانی $H(\Omega)$ در سیستم شکل (۲۷-۵) معادل چه سیستمی در حوزه پیوسته زمانی است؟ جواب این سوال با در نظر گرفتن $Y_c(\omega)$ و $X_c(\omega)$ در شکل (۲۷-۵) داده می شود. در شکل (۲۷-۵) داریم.

$$X(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{\Omega}{T_s} - \frac{2k\pi}{T_s}\right) \quad (۵۵-۵)$$

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\Omega)X_c\left(\frac{\Omega}{T_s} - \frac{2k\pi}{T_s}\right) \quad (۵۶-۵)$$

از معادلات (۵۰-۵) الی (۵۴-۵) می توان استنباط کرد که

$$Y_s(\omega) = Y(\Omega) \Big|_{\Omega = \omega T_s} \quad (۵۷-۵)$$

$$Y_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega T_s)X_s\left(\omega - \frac{2k\pi}{T_s}\right) \quad (۵۸-۵)$$

و بعد از LPF کردن داریم.

$$Y_c(\omega) = T_s X_c(\omega) H(\omega T_s), \quad |\omega| < \frac{\pi}{T_s} \quad (۵۹-۵)$$

بنابراین تابع انتقال معادل به صورت زیر بدست می آید.

$$H_{eff}(\omega) = T_s H(\omega T_s), \quad |\omega| < \frac{\pi}{T_s} \quad (۶۰-۵)$$

بنابراین برای انجام عملیات مشتق گیری رابطه متناظر در حوزه گسسته زمان باید بدین صورت باشد.

$$H(\Omega) = \frac{1}{T_s} j\left(\frac{\Omega}{T_s}\right), \quad |\Omega| < \pi \quad (۶۱-۵)$$

این تابع تبدیل با دوره تناوب 2π متناوب است و اگر آن را در سیستم شکل (۲۷-۵) در محل $H(\Omega)$ استفاده کنیم عمل کلی سیستم معادل یک مشتق گیر پیوسته با تابع تبدیل زیر است.

$$H_{eff}(\omega) = \begin{cases} j\omega & |\omega| < \frac{\pi}{T_s} \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{T_s} \end{cases} \quad (۶۲-۵)$$

پاسخ فرکانسی $H_{eff}(\omega)$ و $H(\Omega)$ در شکل (۲۸-۵) رسم شده اند. محاسبه پاسخ ضربه به صورت تمرین به عهده دانشجویان گذاشته می شود.

بنابراین اگر یک سیستم گسسته زمانی با پاسخ فرکانسی به صورت (۶۱-۵) در شکل (۲۷-۵) در محل

$h[n]$ استفاده شود خروجی $y_c(t)$ بازاء هر ورودی باند محدود (که بالاترین مؤلفه فرکانسی اش از $\frac{\pi}{2}$

کوچکتر باشد) مشتق ورودی خواهد بود.

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها

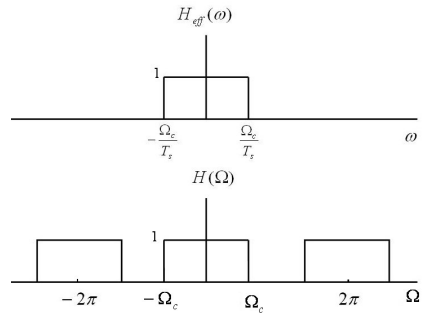
مثال (۵-۲): تابع انتقال یک فیلتر پایین گذر ایده آل در حوزه پیوسته زمانی بصورت رابطه (۵-۶۳) است.

$$H_{eff}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \frac{\Omega_c}{T_s} = \omega_c \\ 0 & |\omega| > \frac{\Omega_c}{T_s} = \omega_c \end{cases} \quad (۵-۶۳)$$

اگر بخواهیم بجای این سیستم از یک سیستم معادل گسسته زمانی در شکل (۵-۲۷) استفاده کنیم باید سیستمی را بصورت زیر بکار ببریم.

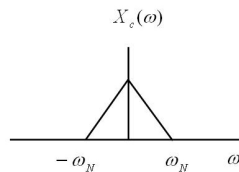
$$H(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \Omega_c \\ 0 & \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases} \quad (۵-۶۴)$$

که با دوره تناوب 2π تکرار می شود.



شکل (۵-۲۸): نمایش $H(\Omega)$ و $H_{eff}(\omega)$

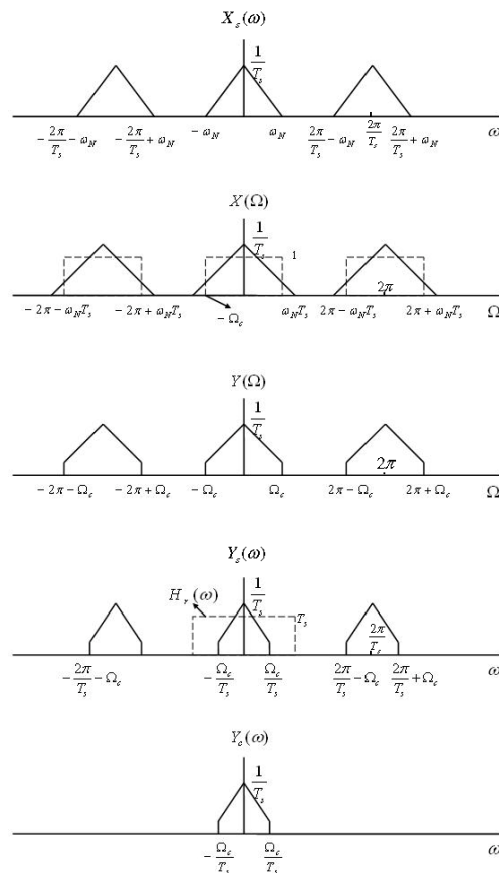
اکنون فرض کنید سیگنال $x_c(t)$ دارای طیف زیر باشد.



شکل (۵-۲۹): نمایش طیف $X_c(\omega)$

بنابراین به ترتیب برای $X_s(\omega)$ ، $X(\Omega)$ ، $Y(\Omega)$ و $Y_s(\omega)$ و در نهایت $Y_c(\omega)$ طیف های زیر را داریم.

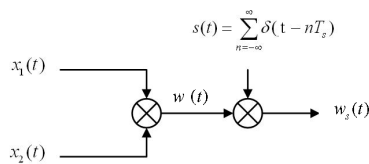
فصل پنجم: نظریه نمونه برداری



شکل (۳۰-۵): نمایش $X_s(\omega)$ ، $X(\Omega)$ ، $Y(\Omega)$ ، $Y_s(\omega)$ و $Y_c(\omega)$

پس فرکانس قطع فیلتر در حوزه پیوسته زمانی را می توان توسط دوره تناوب نمونه برداری T_s تعیین نمود، بدون اینکه Ω_c یا فرکانس قطع فیلتر گسسته زمانی را تغییر داد. این یک روش متداول در ساختن فیلترهای پایین گذر پیوسته زمانی با فرکانس های قطع مختلف، از فیلترهای پایین گذر گسسته زمانی با یک فرکانس قطع می باشد.

مثال (۳-۵): در سیستم نشان داده شده در شکل ۳۱-۵ بیشترین فاصله نمونه ها (T_s) جهت نمونه برداری موفقیت آمیز چقدر باید باشد؟



شکل ۳۱-۵ سیستم مربوط به ۳-۵

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها

توجه کنید که پهنای باند $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به ترتیب ω_1 و ω_2 می باشند.
حل: لازم است ابتدا پهنای باند $w(t)$ را بیابیم. با توجه به اینکه حاصلضرب دو سیگنال $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ است، داریم.

$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

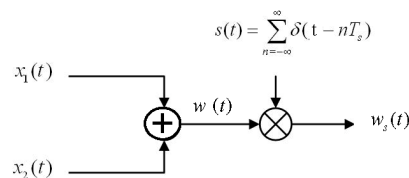
بنابراین طیف $W(\omega)$ دارای پهنای باند $\omega_1 + \omega_2$ می باشد. بنابراین طبق نظریه نمونه برداری شرط زیر را جهت نمونه برداری موفقیت آمیز خواهیم داشت.

$$\frac{2\pi}{T_s} \geq 2(\omega_1 + \omega_2)$$

و یا

$$T_s \leq \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}$$

مثال (۴-۵): در سیستم شکل زیر بیشترین فاصله نمونه ها (T_s) جهت نمونه برداری موفقیت آمیز چقدر باید باشد.



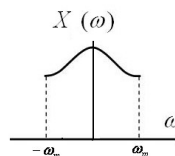
شکل ۳۲-۵ سیستم مربوط به مثال ۴-۵

توجه کنید که پهنای باند $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به ترتیب ω_1 و ω_2 باشد.
حل: با توجه به شکل پهنای باند $W(\omega)$ مساوی ماکزیمم ω_1 و ω_2 می باشد بنابراین

$$T_s \leq \frac{\pi}{\text{Max}\{\omega_1, \omega_2\}}$$

مثال (۵-۵): در سیستم شکل ۵-۵ سیگنال نمونه بردار یک قطار ضربه است که علامت هر دو نمونه مجاور مخالف یکدیگر است. اگر طیف سیگنال بصورت شکل ۳۳-۵ نمایش داده شده باشد. تبدیل فوریه

$x_s(t)$ و $y(t)$ را برای حالتی که $\Delta < \frac{\pi}{2\omega_M}$ باشد بدست آورید.



شکل ۳۳-۵ شکل طیف سیگنال $x(t)$ مربوط به مثال ۵-۵

$$x_s(t) = x(t)s(t)$$

فصل پنجم: نظریه نمونه برداری

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * S(\omega)$$

می توان سیگنال نمونه بردار را بصورت زیر نوشت.

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k\Delta) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k\Delta + \Delta)$$

بنابراین بسادگی می توان تبدیل فوریه $s(t)$ را بدین صورت نوشت.

$$S(\omega) = \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) - \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) e^{-j\omega\Delta}$$

که در آن $\omega_s = \frac{2\pi}{2\Delta}$ می باشد.

$$S(\omega) = \frac{\pi}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{k\pi}{\Delta}) [1 - e^{-jk\omega_s\Delta}]$$

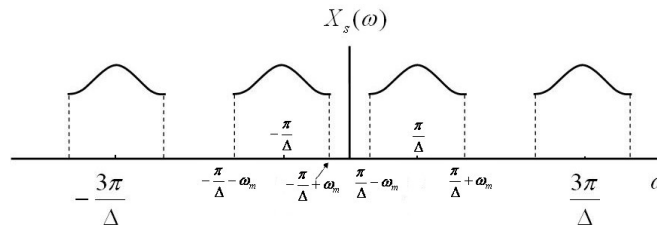
در این صورت داریم.

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{\Delta} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - \frac{k\pi}{\Delta}) (1 - e^{-jk\omega_s\Delta}) \right\} = \frac{1}{2\Delta} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - \frac{k\pi}{\Delta}) (1 - e^{-jk\pi}) \right\}$$

و یا

$$X_s(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - \frac{k\pi}{\Delta}) & k, \text{ odd} \\ 0 & k, \text{ even} \end{cases}$$

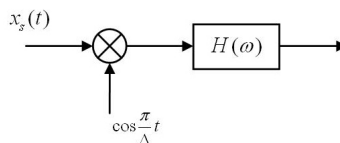
بنابراین طیف $X_s(\omega)$ بصورت زیر می باشد.



شکل ۵-۳۴ شکل طیف $X_s(\omega)$ مربوط به مثال ۵-۵

مثال (۵-۴): جهت بازسازی سیگنال اصلی در مثال (۵-۵) از روی نمونه های آن از چه سیستمی می توان استفاده کرد.

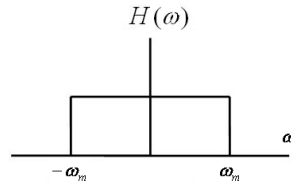
حل: می توان از سیستم شکل ۵-۳۵ استفاده کرد.



شکل ۵-۳۵ شکل سیستم مربوط به مثال ۵-۵

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها

که در آن $H(\omega)$ یک فیلتر پایین گذر بصورت شکل ۵-۳۶ است.



شکل ۵-۳۶: شکل طیف $H(\omega)$ مربوط به مثال ۵-۶

مثال (۵-۷): ماکزیمم مقدار Δ جهت نمونه برداری موفقیت آمیز از سیگنال $x(t)$ چقدر می تواند باشد؟

حل: با توجه به شکل ۵-۲۳ و طبق نظریه نمونه برداری باید

$$\frac{\pi}{\Delta} - \omega_m \geq -\frac{\pi}{\Delta} + \omega_m \Rightarrow \frac{2\pi}{\Delta} \geq 2\omega_m$$

و یا

$$\Delta \leq \frac{\pi}{\omega_m}$$

مثال (۵-۸): در سیستم نمونه بردار شکل ۵-۵ از یک موج متناوب مربعی مطابق شکل ۵-۲۶ جهت

نمونه برداری از سیگنال باند محدود $x(t)$ استفاده شده است. دوره تناوب سیگنال نمونه بردار T_s

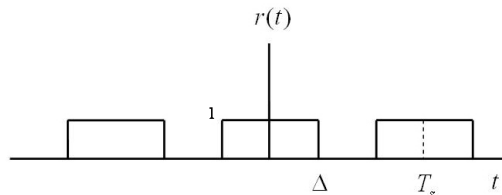
می باشد. اگر پهنای باند سیگنال ω_m باشد و با فرض $\Delta = \frac{T_s}{3}$ مطلوب است ماکزیمم مقدار T_s جهت

نمونه برداری موفقیت آمیز.

حل: سیگنال نمونه بردار را به صورت زیر داریم.

$$s(t) = r(t)$$

که در آن $r(t)$ بصورت زیر است.



شکل ۵-۳۷: سیگنال نمونه بردار مربوط به مثال ۵-۸

اما قبلاً ضرایب سری فوریه $r(t)$ را بدست آورده بودیم.

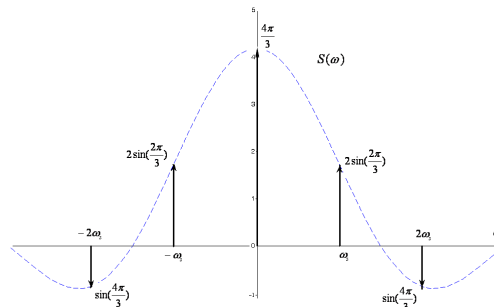
$$a_k = \frac{\sin k\omega_s \Delta}{k\pi} \quad \text{و} \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

پس

$$S(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\omega_s \Delta}{k\pi} \delta(\omega - k\omega_s)$$

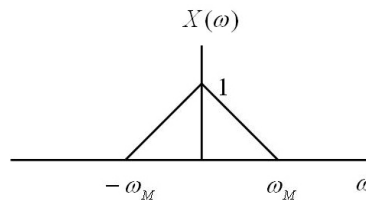
فصل پنجم: نظریه نمونه برداری

بنابراین طیف $S(\omega)$ بصورت شکل ۳۸-۵ خواهد بود.



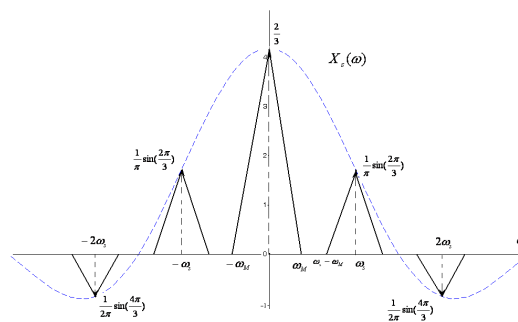
شکل ۳۸-۵ شکل طیف $S(\omega)$ مربوط به مثال ۸-۵

اگر فرض کنیم طیف $x(t)$ بصورت زیر باشد.



شکل ۳۹-۵ شکل طیف $x(t)$ مربوط به مثال ۸-۵

در این صورت طیف سیگنال نمونه برداری شده $x_s(t)$ بصورت زیر خواهد بود.



شکل ۴۰-۵ شکل طیف $x(t)$ مربوط به مثال ۸-۵

بنابراین شرط لازم بدست می آید.

$$\omega_s - \omega_M \geq \omega_M$$

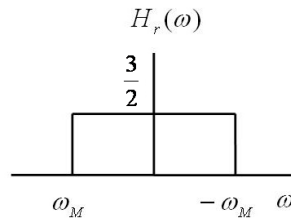
و یا

$$\omega_s \geq 2\omega_M \Rightarrow T_s \leq \frac{\pi}{\omega_M}$$

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها

مثال (۹-۵): برای مثال (۸-۵) سیستمی جهت بازسازی $x(t)$ از روی نمونه های برداشته شده طراحی کنید.

حل: چنین سیستمی بسادگی یک فیلتر پایین گذر با بهره $\frac{3}{2}$ می باشد.

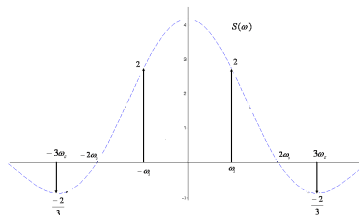


شکل ۴۱-۵ شکل طیف سیستم باز ساز مربوط به مثال ۹-۵

مثال (۱۰-۵): مثال (۸-۵) و (۹-۵) را به ازاء $\Delta = \frac{T_s}{4}$ تکرار کنید و فرض کنید سیگنال نمونه بردار به صورت زیر باشد.

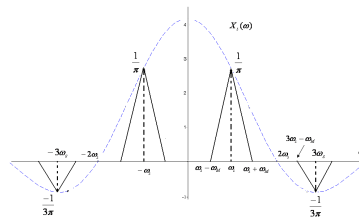
$$s(t) = r(t) - 0.5$$

حل: در این حالت همان گونه که مشاهده می شود مؤلفه DC و کلیه مولفه های زوج در سیگنال $s(t)$ وجود نخواهد داشت و در نتیجه طیف سیگنال $s(t)$ بصورت شکل ۴۲-۵ خواهد بود.



شکل ۴۲-۵ شکل طیف $S(\omega)$ مربوط به مثال ۱۰-۵

طیف سیگنال نمونه برداری شده به صورت شکل ۴۳-۵ خواهد بود.



شکل ۴۳-۵ شکل طیف $X_s(\omega)$ مربوط به مثال ۱۰-۵

در این صورت جهت نمونه برداری موفقیت آمیز لازم است که

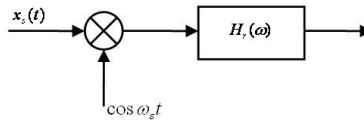
$$\omega_s + \omega_M \geq 3\omega_s - \omega_M \Rightarrow \omega_s \geq \omega_M$$

فصل پنجم: نظریه نمونه برداری

و یا

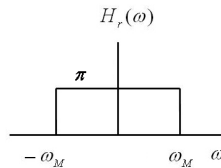
$$T_s \leq \frac{2\pi}{\omega_M}$$

و اما جهت بازسازی سیگنال اصلی از روی نمونه هایش سیستم شکل ۴۴-۵ پیشنهاد می شود.



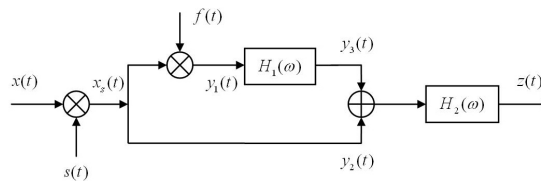
شکل ۴۴-۵ سیستم بازسازی مربوط به مثال ۱۰-۵

که در آن



شکل ۴۵-۵ تابع انتقال فیلتر سیستم باز ساز

مثال (۵-۱۱): یک سیگنال باند محدود با پهنای باند w را می توان بطور یکتا از روی نمونه های غیر یکنواخت نیز بازسازی کرد، مشروط بر اینکه تعداد نمونه ها $2w$ نمونه در ثانیه و یا بیشتر باشد. در این مساله یک شکل ساده از انواع نمونه برداری غیر یکنواخت مورد بررسی قرار می گیرد. به شکل ۴۶-۵ توجه کنید.



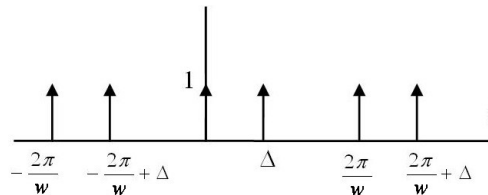
شکل ۴۶-۵ سیستم نمونه بردار مورد بحث در مثال ۱۱-۵

برای شکل فوق فرض های زیر را در نظر می گیریم:

۱- $x(t)$ یک سیگنال باند محدود است یعنی

$$X(\omega) = 0 \quad |\omega| > w$$

۲- $s(t)$ یک قطار ضربه با فواصل غیر یکنواخت بین ضربه ها می باشد.



شکل ۴۷-۵ سیگنال نمونه بردار با نمونه های غیر یکنواخت

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها

۳- $f(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{w}$ می باشد که در نقاط $t = 0$ و $t = \Delta$ مقدار آن بصورت زیر است.

$$f(0) = a, f(\Delta) = b$$

۴- $H_1(\omega)$ یک سیستم ۹۰ درجه تغییر فاز دهنده می باشد.

$$H_1(\omega) = \begin{cases} j & \omega > 0 \\ -j & \omega < 0 \end{cases}$$

۵- $H_2(\omega)$ یک فیلتر پایین گذر است.

$$H_2(\omega) = \begin{cases} K & 0 < \omega < w \\ K^* & -w < \omega < 0 \\ 0 & |\omega| > w \end{cases}$$

که در آن K یک عدد ثابت مختلط است.

مطلوبست

الف) تبدیل فوریه $s(t)$

ب) تبدیل فوریه حاصلضرب $f(t)s(t)$

ج) عبارتی برای تبدیل فوریه $y_1(t)$ در فاصله $0 < \omega < w$

د) عبارتی برای تبدیل فوریه $y_2(t)$ در فاصله $0 < \omega < w$

ه) عبارتی برای تبدیل فوریه $y_3(t)$ در فاصله $0 < \omega < w$

و) مقادیر پارامترهای حقیقی a و b و مقدار پارامتر مختلط K بصورت تابعی از Δ بگونه ای که به ازاء

هر سیگنال باند محدود $x(t)$ و $0 < \Delta < \frac{\pi}{w}$ داشته باشیم.

$$z(t) = x(t)$$

حل: الف) برای بدست آوردن تبدیل فوریه $s(t)$ ابتدا آن را بصورت زیر می نویسیم.

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \frac{2\pi}{w}) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \frac{2\pi}{w} - \Delta)$$

بنابراین $s(t)$ را می توان بصورت مجموع دو موج تصور کرد.

$$s(t) = g(t) + g(t - \Delta)$$

که در آن

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \frac{2\pi}{w})$$

تبدیل فوریه $g(t)$ را قبلاً بارها بدست آورده ایم.

$$G(\omega) = \frac{2\pi}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - kw) = w \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - kw)$$

فصل پنجم: نظریه نمونه برداری

بنابراین تبدیل فوریه $s(t)$ برابر است با

$$S(\omega) = w(1 + e^{-j\omega\Delta}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega)$$

و یا

$$S(\omega) = w \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + e^{-jk\omega\Delta}) \delta(\omega - k\omega)$$

ب) تبدیل فوریه $l(t) = f(t)s(t)$ برابر است با

$$\begin{aligned} L(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)s(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\frac{2\pi}{\omega}) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\frac{2\pi}{\omega} - \Delta) \right] f(t)e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

بدلیل ضرب شدن $f(t)$ در تابع ضربه، فقط مقادیر $f(t)$ در لحظات $t = kT$ و $t = kT + \Delta$ مورد

نیاز است (k عددی صحیح و $T = \frac{2\pi}{\omega}$).

$$\begin{aligned} L(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) e^{-j\omega kT} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT + \Delta) \delta(t - kT - \Delta) e^{-j\omega(kT + \Delta)} \right] dt \\ L(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) e^{-j\omega kT} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) dt + \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT + \Delta) e^{-j\omega(kT + \Delta)} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT - \Delta) dt \end{aligned}$$

بنابراین

$$L(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) e^{-j\omega kT} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT + \Delta) e^{-j\omega(kT + \Delta)}$$

اما چون $f(t)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{\omega}$ می باشد، داریم.

$$f(kT) = f(0) = a \quad \text{و} \quad f(kT + \Delta) = f(\Delta) = b$$

بنابراین

$$L(\omega) = a \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT} + b e^{-j\omega\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT}$$

و یا

$$L(\omega) = (a + b e^{-j\omega\Delta}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT}$$

اما بسادگی می توان ثابت کرد که

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

ابتدا با نوشتن تبدیل فوریه $m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ داریم.

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها

$$M(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT}$$

اما قبلاً تبدیل فوری قطار ضربه را بصورت زیر داشتیم.

$$M(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T})$$

بنابراین اثبات کامل می شود و بدین ترتیب با فرض $w = \frac{2\pi}{T}$ داریم.

$$L(\omega) = (a + be^{-j\omega\Delta}) w \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - kw)$$

و یا

$$L(\omega) = w \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a + be^{-jk\omega\Delta}) \delta(\omega - kw)$$

$$y_1(t) = f(t)s(t)x(t) = l(t)x(t)$$

(ج)

$$Y_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[(a + be^{-j\omega\Delta}) w \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - kw) \right] * X(\omega)$$

$$= \frac{w}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a + be^{-jk\omega\Delta}) X(\omega - kw)$$

بنابراین در فاصله

$$0 < \omega < w$$

$$Y_1(\omega) = \frac{w}{2\pi} \left[(a + b) X(\omega) + (a + be^{-j\omega\Delta}) X(\omega - w) \right]$$

$$y_2(t) = s(t)x(t)$$

(د)

بنابراین

$$Y_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} w \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + e^{-jk\omega\Delta}) \delta(\omega - kw) * X(\omega)$$

$$= \frac{w}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + e^{-jk\omega\Delta}) X(\omega - kw)$$

و در فاصله

$$0 < \omega < w$$

$$Y_2(\omega) = \frac{w}{2\pi} \left[2X(\omega) + (1 + e^{-j\omega\Delta}) X(\omega - w) \right]$$

(ه) طبق قضیه کانولوشن تبدیل فوری $y_3(t)$ از رابطه زیر حاصل می شود.

$$Y_3(\omega) = H_1(\omega) Y_1(\omega)$$

در فاصله $0 < \omega < w$

$$H_1(\omega) = j$$

فصل پنجم: نظریه نمونه برداری

$$Y_3(\omega) = jY_1(\omega)$$

$$= j \frac{w}{2\pi} [(a+b)X(\omega) + (a+be^{-jw\Delta})X(\omega-w)]$$

(و جهت اینکه خروجی همواره مساوی $x(t)$ باشد باید

$$Z(\omega) = H_2(\omega)[Y_2(\omega) + Y_3(\omega)] = X(\omega)$$

اکنون باید داشته باشیم (از مساوی قرار دادن دو طرف رابطه به ازاء $0 < \omega < w$)

$$X(\omega) = K \frac{w}{2\pi} \{ [2 + j(a+b)]X(\omega) + [(1 + e^{-jw\Delta}) + j(a + be^{-jw\Delta})]X(\omega - w) \}$$

نتیجتاً داریم.

$$K \frac{w}{2\pi} [2 + j(a+b)] = 1$$

$$(1 + e^{-jw\Delta}) + j(a + be^{jw\Delta}) = 0$$

$$1 + e^{-jw\Delta} + ja + jbe^{-jw\Delta} = 0$$

نتیجتاً داریم.

$$a = \sin w\Delta + \cot g(w\Delta)(1 + \cos w\Delta)$$

$$K = \frac{2\pi/w}{2 + j(a+b)} \quad \text{و} \quad b = \frac{-(1 + \cos w\Delta)}{\sin w\Delta}$$

همان گونه که می بینیم در حالت خاص که $\Delta = \frac{\pi}{w}$ است مقادیر a و b برابر می شوند.

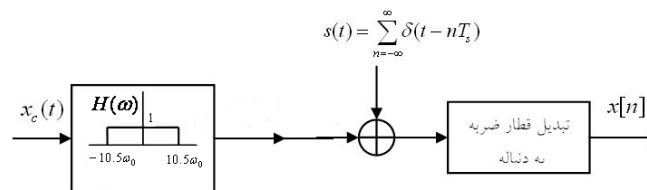
مثال (۵-۱۲): شکل زیر یک مدار مبدل سیگنال پیوسته به دنباله گسسته می باشد.

سیگنال ورودی متناوب با دوره تناوب 0.1 ثانیه می باشد. ضرایب سری فوریه آن عبارتند از

$$a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \quad -\infty < k < \infty$$

فیلتر پایین گذر $H(\omega)$ دارای مشخصه نشان داده شده در شکل می باشد. دوره تناوب نمونه برداری

$T_s = 2 \times 10^{-3}$ ثانیه می باشد.



شکل ۵-۴۸ سیستم مورد بحث در مثال ۵-۱۲

(الف) نشان دهید که $x[n]$ یک دنباله متناوب است و دوره تناوب آن را بیابید.

(ب) ضرایب سری فوریه $x[n]$ را بیابید.

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها

حل : الف) بسط $x(t)$ به سری فوری بصورت زیر است.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ و } T = 0.1s$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{jk\omega_0 t} \quad \text{و} \quad \omega_0 = 20\pi \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

طیف $X(\omega)$ بصورت زیر است.

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \delta(\omega - k\omega_0)$$

بنابراین فقط تا ۱۰ ضربه از فیلتر عبور می نماید. پس

$$x_c(t) = \sum_{k=-10}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{jk\omega_0 t}$$

و چون

$$x[n] = x_c[nT_s]$$

خواهیم داشت.

$$x[n] = \sum_{k=-10}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{jk\omega_0 nT_s}$$

بنابراین

$$x[n] = \sum_{k=-10}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{jk0.04\pi n}$$

رابطه فوق در حقیقت مبین سری فوری گسسته زمانی $x[n]$ می باشد. از اینجا نتیجه می گیریم $x[n]$ متناوب است و دوره تناوب آن از رابطه زیر بدست می آید.

$$\frac{2\pi}{N} = 0.04\pi$$

بنابراین دوره تناوب $x[n]$ برابر است با

$$N = 50$$

ب) ضرایب سری فوری در یک دوره تناوب عبارتند از

$$a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \quad -10 < k < 10$$

توجه شود که ضرایب سری فوری در خارج فاصله مذکور برابر صفر هستند.

مثال (۵-۱۳): از یک سیگنال باند محدود $x_c(t)$ با سرعتی بیشتر از سرعت نایکوئیست نمونه برداری شده است. فاصله نمونه ها T_s می باشد. نمونه ها پس از آن به دنباله تبدیل می شوند.

مطلوبست ارتباط انرژی سیگنال $x_c(t)$ و دنباله $x[n]$.

حل: انرژی دنباله $x[n]$ بصورت زیر تعریف می شود.

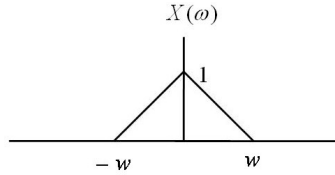
فصل پنجم: نظریه نمونه برداری

$$E_d = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

و انرژی سیگنال $x_c(t)$ بصورت زیر است.

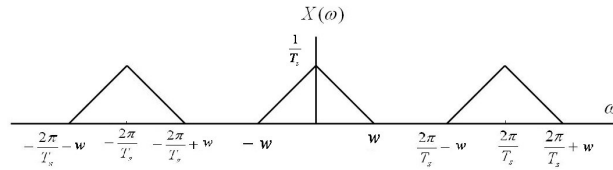
$$E_c = \int_{-\infty}^{\infty} |x_c(t)|^2 dt$$

فرض می کنیم طیف $x(t)$ بصورت زیر باشد.



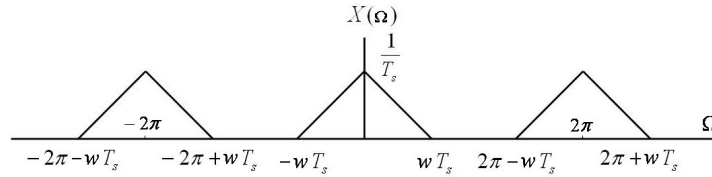
شکل ۴۹-۵ طیف سیگنال $x(t)$ مربوط به مثال ۱۳-۵

در این صورت طیف $x_p(t)$ بصورت زیر است.



شکل ۵۰-۵ طیف سیگنال $x_p(t)$ مربوط به مثال ۱۳-۵

نتیجتاً طیف تبدیل فوریه گسسته زمان $x[n]$ بصورت زیر خواهد بود.



شکل ۵۱-۵ طیف سیگنال گسسته زمان متناظر با $x(t)$

اما طبق رابطه پارسوال در حوزه گسسته زمان داریم.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)| d\Omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

اما رابطه پارسوال در حوزه پیوسته زمان نیز بصورت زیر است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_c(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_c(\omega)| d\omega$$

با توجه به شکل ها می توان در یک دوره متناوب رابطه زیر را نوشت (با تغییر متغیرهای مستقل).

$$X(\Omega) = \frac{1}{T_s} X_c\left(\frac{\Omega}{T_s}\right)$$

بنابراین

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها

$$E_d = \frac{1}{2\pi} \int_{-wT_s}^{wT_s} |X(\Omega)|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi T_s^2} \int_{-wT_s}^{wT_s} \left| X_c\left(\frac{\Omega}{T_s}\right) \right|^2 d\Omega$$

و یا تغییر متغیر بصورت $u = \frac{\Omega}{T_s}$

$$E_d = \frac{1}{2\pi T_s} \int_{-w}^w |X_c(u)|^2 du$$

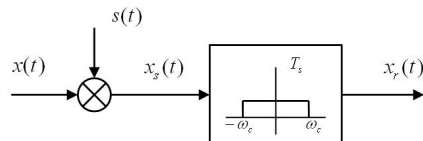
و چون $X_c(\omega)$ باند محدود است.

$$= \frac{1}{2\pi T_s} \int_{-\infty}^{\infty} |X_c(\omega)|^2 d\omega$$

بنابراین

$$E_d = \frac{1}{T_s} E_c$$

مثال (۵-۱۴): شکل زیر یک سیستم نمونه بردار که بوسیله یک فیلتر بازساز دنبال شده است را نشان می دهد.



شکل ۵-۵۲ سیستم مربوط به مثال ۵-۱۴

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

با توجه به نظریه نمونه برداری می دانیم که اگر $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ از دو برابر بالاترین مولفه فرکانسی موجود در

$x(t)$ بیشتر باشد، می توان بطور یکتا $x(t)$ را از روی نمونه هایش بازسازی کرد. در غیر این صورت، تداخل ایجاد می شود و سیگنال بازسازی شده $x_r(t)$ مساوی $x(t)$ نخواهد بود. اما در لحظات

نمونه برداری مقادیر $x(t)$ و $x_r(t)$ مساوی هستند مشروط بر این که $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$ باشد. یعنی

$$x_r(kT_s) = x(kT_s) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

در این مساله فرض کنید $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$ است و رابطه فوق را ثابت کنید.

حل:

$$x_s(t) = x(t)s(t)$$

داریم

فصل پنجم: نظریه نمونه برداری

$$= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

نتیجتاً برای $x_r(t)$ داریم.

$$x_r(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \right) * h(t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) h(t - nT_s)$$

اما می دانیم (با توجه به شکل پاسخ فرکانسی)

$$h(t) = T_s \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sinc} \frac{\omega_c t}{\pi}$$

بنابراین

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) T_s \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sinc} \left[\frac{\omega_c (t - nT_s)}{\pi} \right]$$

و در نتیجه

$$x_r(kT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \text{Sinc} \left[\frac{\omega_c}{\pi} T_s (k - n) \right] T_s \frac{\omega_c}{\pi}$$

از طرفی $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$ پس

$$x_r(kT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \text{Sinc} (k - n)$$

و با توجه به خواص تابع sinc می توان رابطه زیر را نوشت.

$$\text{Sinc}(k - n) = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 1 & k = n \end{cases}$$

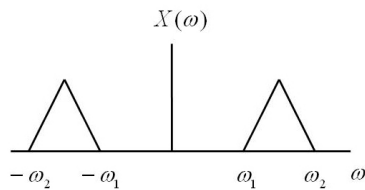
که در آن k و n اعداد صحیح هستند. پس

$$x_r(kT_s) = x(kT_s)$$

مثال (۵-۱۵): در این مساله می خواهیم یک حالت ساده مربوط به نمونه برداری از سیگنال های میان گذر^۱ را مورد بررسی قرار دهیم. این سیگنال دارای باندی محدود است که انرژی آن در فرکانس های میانی متمرکز شده است (مانند شکل ۵-۵۳).

^۱Band-pass

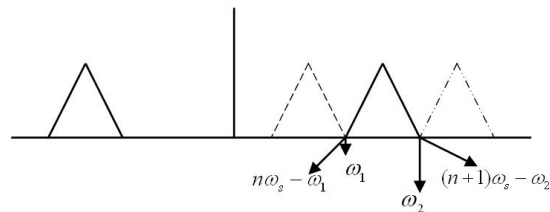
مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها



شکل ۵-۵۳ سیگنال میانگذر مربوط به مثال ۵-۱۵

طبق نظریه نمونه برداری حداقل فرکانس نمونه برداری باید $\omega_s = 2\omega_2$ باشد تا بتوان بطور موفقیت آمیز وبه کمک یک فیلتر میان گذر، سیگنال را بازسازی کرد. اما در این مساله می خواهیم ثابت کنیم که می توان با سرعت های کمتر نیز از سیگنال میان گذر بصورت موفقیت آمیز نمونه برداری کرد. فرض کنید $\omega_2 - \omega_1 = w$ و $\omega_1 = 4w$ نتیجتاً $\omega_2 = 5w$ می گردد. اکنون فرکانس نمونه برداری حداقل را جهت امکان بازسازی سیگنال به کمک یک فیلتر میان گذر بدست آورید.

حل: چون قرار است سیگنال به کمک فیلتر میان گذر بازسازی گردد می توان ω_s را بگونه ای انتخاب کرد که تمام انتقال های سیگنال تا انتقال n ام در داخل محدوده $|\omega| < \omega_1$ قرار گیرند و انتقال $(n+1)$ ام در محدوده $|\omega| > \omega_2$ قرار گیرند. در این صورت به کمک یک فیلتر میان گذر و بدون هیچ تداخلی می توان سیگنال را بازسازی کرد.



شکل ۵-۵۴ نمونه برداری میانگذر

بنابراین لازم است.

$$n \omega_s - \omega_1 \leq \omega_1$$

$$(n+1)\omega_s - \omega_2 \geq \omega_2$$

در حالت کلی حل همزمان دو نامساوی فوق ساده نمی باشد، اما با فرضیهایی که انجام داده ایم ساده است (حالت تساوی را در نظر می گیریم).

$$n \omega_s = 2 \omega_1$$

$$(n+1) \omega_s = 2 \omega_2$$

بنابراین

$$\omega_s = 2 w$$

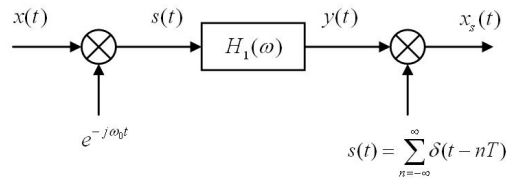
ولی اگر می خواستیم از نظریه نمونه برداری استفاده کنیم به پهنای باند حداقل پنج برابر نیاز داشتیم.

$$\omega_s = 2 \omega_2 = 10 w$$

فصل پنجم: نظریه نمونه برداری

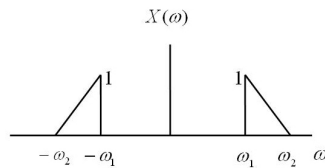
مثال (۱۶-۵): در مثال (۱۵-۵) یک روش جهت نمونه برداری از سیگنال های میان گذر مورد بررسی قرار گرفت.

اکنون می خواهیم با روش دیگری در این مثال آشنا شویم. در این روش ابتدا سیگنال میان گذر را در یک تابع نمایی مختلط بصورت $e^{-j\omega_0 t}$ ضرب کرده و پس از عبور دادن از فیلتر پایین گذر $H_1(\omega)$ از آن نمونه برداری می کنیم. مراحل گفته شده در شکل زیر نمایش داده شده اند.



شکل ۵-۵ سیستم نمونه بردار میانگذر

فرض کنید طیف $x(t)$ بصورت زیر باشد.



شکل ۵-۶ طیف سیگنال میانگذر

اگر $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ و اگر فرکانس قطع فیلتر پایین گذر $H_1(\omega)$ ، $\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$ باشد، مطلوبست

الف) رسم طیف $y(t)$.

ب) تعیین ماکزیمم دوره تناوب نمونه برداری T .

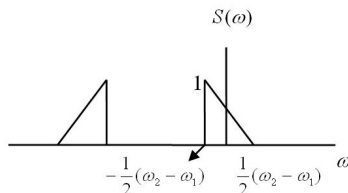
ج) رسم طیف $x_s(t)$.

د) سیستمی جهت بازسازی $x(t)$ از $x_s(t)$.

حل: الف) طبق قضیه مدولاسیون می توان طیف $s(t)$ را بدست آورد.

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * 2\pi\delta(\omega + \omega_0) = X(\omega + \omega_0)$$

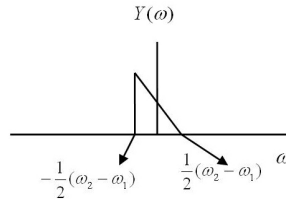
که شکل آن به این صورت است.



شکل ۵-۷ طیف سیگنال میانگذر پس از انتقال به سمت چپ

در نتیجه خروجی فیلتر پایین گذر فقط شامل آن قسمت از طیف $S(\omega)$ باشد که حول مبدأ قرار دارد.

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها



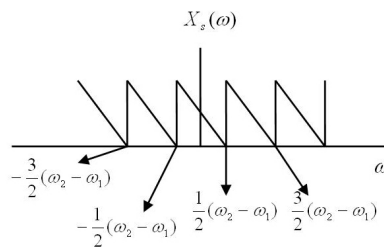
شکل ۵-۵۸ طیف سیگنال میانگذر پس از انتقال و عبور از فیلتر پائین گذر

(ب) با توجه به اینکه $y(t)$ یک سیگنال پایین گذر است پس طبق نظریه نمونه برداری باید

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq 2\left(\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)\right) = \omega_2 - \omega_1$$

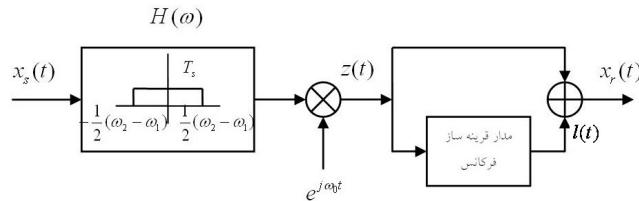
$$T_s \leq \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$$

(ج) با فرض اینکه $T_s = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$ باشد طیف $x_s(t)$ بصورت زیر خواهد بود.



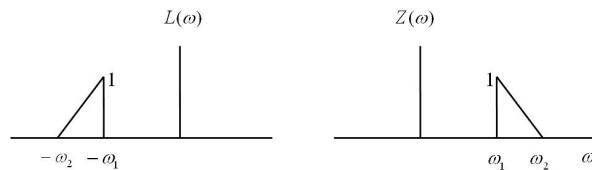
شکل ۵-۵۹ طیف سیگنال میانگذر پس از انتقال و عبور از فیلتر پائین گذر و نمونه برداری

(د) سیستم زیر جهت بازسازی $x(t)$ از $x_s(t)$ پیشنهاد می گردد.



شکل ۵-۶۰ سیستمی زیر جهت بازسازی $x(t)$ از $x_s(t)$

طیف سیگنالها در هر مرحله در شکل زیر رسم شده اند.



(a)

(b)

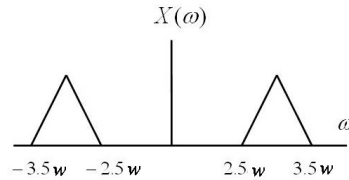
شکل ۵-۶۱ نمایش طیف های (a) $L(\omega)$ و (b) $Z(\omega)$

فصل پنجم: نظریه نمونه برداری

نتیجتاً طیف $x_r(t)$ مشابه طیف $x(t)$ خواهد شد.

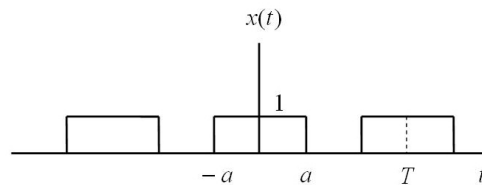
مسائل فصل پنجم

۱-۵ حداقل فرکانس نمونه برداری موفقیت آمیز از سیگنال میان گذر $x(t)$ را بدست آورید. توجه کنید که بعد از نمونه برداری باید بتوان $x(t)$ را با عبور نمونه هایش از یک فیلتر میان گذر بازسازی کرد.



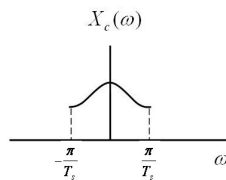
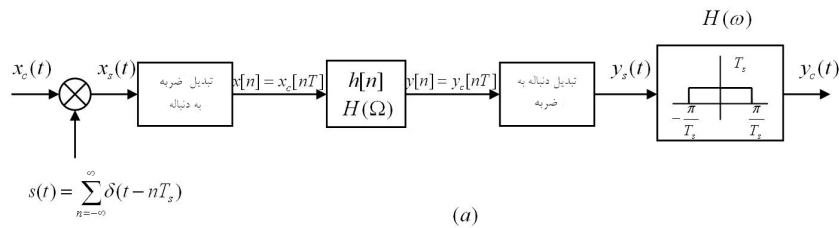
شکل ۵-۶۲ مربوط به مسئله ۱-۵

۲-۵ حداقل فرکانس نمونه برداری موفقیت آمیز از سیگنال $x(t)$ چیست اگر $x(t)$ در حوزه زمان بصورت زیر باشد.

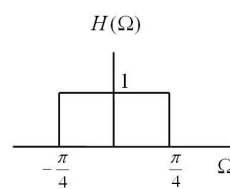


شکل ۵-۶۳ مربوط به مسئله ۲-۵

۳-۵ شکل زیر یک سیستم جهت پردازش گسسته زمانی روی سیگنال های پیوسته زمانی را نشان می دهد. اگر طیف $X_c(\omega)$ و $H(\Omega)$ در یک دوره تناوب بصورت زیر باشد. مطلوب است رسم طیف های $X_s(\omega)$ و $X(\Omega)$ و $Y(\Omega)$ و $Y_s(\omega)$ و $Y_c(\omega)$.



(b)

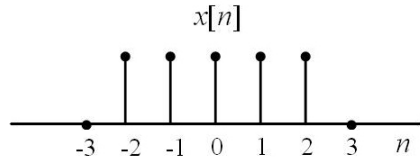


(c)

شکل ۵-۶۴ مربوط به مسئله ۳-۵

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها

۴-۵ دنباله $x[n]$ بصورت زیر مفروض است.



شکل ۴۵-۵ مربوط به مسئله ۴-۵

الف) تبدیل فوریه این دنباله را بیابید.

ب) از این دنباله در حوزه فرکانس نمونه برداری می گردد. حداقل فاصله نمونه ها جهت نمونه برداری موفقیت آمیز چقدر باید باشد.

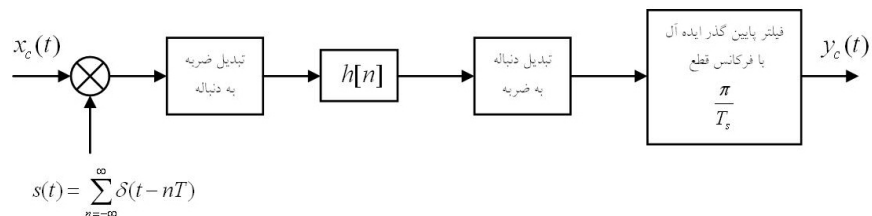
۵-۵ در سیستم شکل زیر $h[n]$ پاسخ ضربه یک سیستم LTI می باشد. این سیستم LTI توسط معادله تفاضلی زیر توصیف می شود.

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + x[n]$$

اگر ورودی یک سیگنال باند محدود باشد بقسمی که

$$X_c(\omega) = 0 \quad |\omega| > \frac{\pi}{T_s}$$

پاسخ ضربه کلی سیستم که نسبت $\frac{Y_c(\omega)}{X_c(\omega)}$ می باشد را بیابید.



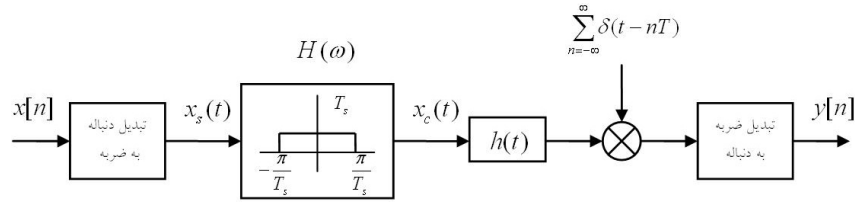
شکل ۴۶-۵ مربوط به مسئله ۵-۵

۶-۵ سیستم شکل زیر نوعی سیستم جهت پردازش پیوسته زمانی روی دنباله های گسسته زمانی را نشان می دهد. در این سیستم $h(t)$ یک سیستم LTI می باشد که توسط معادله دیفرانسیل زیر توصیف می گردد.

$$\frac{d^2 y_c(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy_c(t)}{dt} + 3 y_c(t) = x(t)$$

مطلوبست پاسخ ضربه گسسته زمانی معادل.

فصل پنجم: نظریه نمونه برداری



شکل ۶۷-۵ مربوط به مسئله ۵-۶

۷-۵ یک سیگنال پیوسته زمان بصورت زیر را در نظر بگیرید.

$$x_c(t) = s_c(t) - as_c(t - T_D)$$

و فرض کنید تبدیل فوریه $X_c(\omega)$ محدود به $\frac{\pi}{T_s}$ باشد. اگر $x_c(t)$ بوسیله یک قطار ضربه با دوره

تناوب T_s نمونه برداری شود. بقسمی که

$$x[n] = x_c(nT)$$

مطلوبست پاسخ ضربه $h[n]$ یک سیستم گسسته زمان LTI بگونه ای که

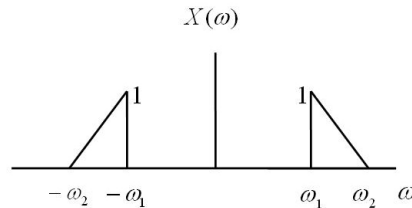
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k]h[n-k]$$

که در آن $s[n] = s_c(nT)$ است و $T_D = T_s$ است.

۸-۵ مسئله ۷-۵ را به ازاء $T_D = \frac{T_s}{2}$ حل کنید. آیا پاسخ تفاوتی می کند؟

۹-۵ طیف یک سیگنال میان گذر مفروض $x(t)$ بصورت زیر است. مطلوب است رسم طیف دنباله

$$x[n] = x(nT_s) \quad \text{که در آن} \quad T_s = \frac{\pi}{\omega_2}$$



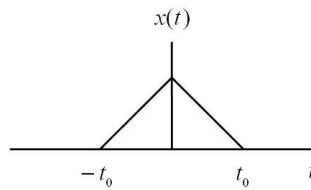
شکل ۶۸-۵ مربوط به مسئله ۵-۹

۱۰-۵ مساله ۹-۵ را به ازاء $T_s = \frac{2\pi}{\omega_2}$ و $T_s = \frac{\pi}{2\omega_2}$ حل کرده و تفاوت هر یک را با نتیجه مساله ۹-۵

بیان کنید.

۱۱-۵ سیگنال دوره محدود $x(t)$ بصورت زیر مفروض است

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها



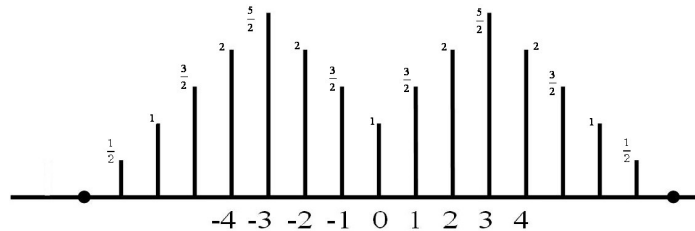
شکل ۵-۶۹ مربوط به مسئله ۵-۱۱

از این سیگنال در حوزه فرکانس نمونه برداری بعمل می آید و سپس به کمک یک پنجره پایین گذر زمانی Low time window دوباره سیگنال اصلی بازسازی می گردد. مطلوب است رسم سیستم نمونه برداری و نمایش طیف هایی که در مراحل مختلف بوجود می آیند (فرض کنید نمونه برداری موفقیت آمیز باشد).

۵-۱۲ در مساله ۵-۱۱ حداقل فاصله ضربه های فرکانسی جهت نمونه برداری موفقیت آمیز چقدر باید باشد؟

۵-۱۳ از سیگنال $x(t) = \text{sinc}(t)$ در حوزه زمان نمونه برداری بعمل می آید و نمونه ها توسط یک مدار ZOH بازسازی می گردد. مطلوب است رسم طیف سیگنال های ایجاد شده در هر مرحله. ۵-۱۴ اگر نمونه های سیگنال در مساله ۵-۱۳ از یک مدار بازسازی خطی عبور داده شوند. مطلوب است رسم طیف خروجی مدار بازساز خطی.

۵-۱۵ یک دنباله گسسته زمان $x[n]$ بصورت شکل ۵-۷۰ را در نظر بگیرید.



شکل ۵-۷۰ مربوط به مسئله ۵-۱۵

از این دنباله با دوره تناوب ۲ نمونه برداری بعمل می آید بگونه ای که

$$x_s[n] = \begin{cases} x[n] & n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

مطلوب است رسم $x_s[n]$ و طیف آن .

۵-۱۶ یک دنباله گسسته زمان بوسیله سیستم شکل ۵-۷۱ نمونه برداری می گردد و سپس بوسیله یک مدار بازساز $h_r[n]$ بازسازی می شود.

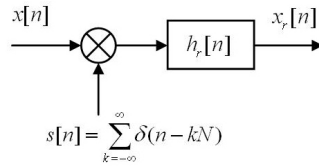
الف) حداقل فرکانس نمونه برداری موفقیت آمیز را بدست آورید.

ب) نشان دهید که بدون توجه به فرکانس نمونه برداری داریم.

$$x_r[mN] = x[mN]$$

فصل پنجم: نظریه نمونه برداری

که در آن m اعداد صحیح مثبت و منفی می باشد.

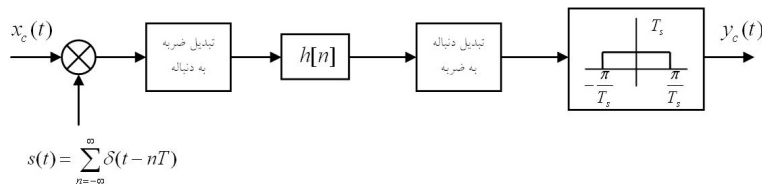


شکل ۵-۷۱ سیستم نمونه بردار مربوط به مسئله ۵-۱۶

۵-۱۷ معادل گسسته زمانی یک سیستم پیوسته زمان با پاسخ ضربه بصورت زیر را بیابید (τ و A اعداد ثابت اند).

$$h_r(t) = A \tau \sin c\left(\frac{\omega}{2\pi} \tau\right)$$

راهنمایی: معادل گسسته زمانی یک سیستم پیوسته سیستمی است که اگر در سیستم شکل زیر قرار داده شود سیستم کلی دارای پاسخ ضربه ای بصورت $h(t)$ گردد.



شکل ۵-۷۲ مربوط به مثال ۵-۱۷

۵-۱۸ حداقل فرکانس نمونه برداری از سیگنالی بصورت زیر را بیابید.

$$x(t) = A \tau \text{Sinc}^4\left(\frac{\omega}{2\pi} \tau\right)$$

۵-۱۹: فرکانس مجازی ناشی از نمونه برداری ناموفق از سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t) = \cos(10^3 \pi t)$$

الف) اگر فرکانس نمونه برداری $\omega_s = 10\pi$ باشد.

ب) اگر فرکانس نمونه برداری $\omega_s = 100\pi$ باشد.

ج) اگر فرکانس نمونه برداری $\omega_s = 1000\pi$ باشد.

د) اگر فرکانس نمونه برداری $\omega_s = 1999\pi$ باشد.

۵-۲۰: یک دیسک که روی آن چهار گلبرگ نقاشی شده اند را در نظر بگیرید. این دیسک با سرعت ۱۵ دور بر ثانیه می چرخد. از یک نوار باریک این دیسک قابل مشاهده می باشد.

بدین ترتیب فرکانس نوسان علامت مشاهده شده از نوار باریک ۶۰ هرتز می باشد. $v(t)$ موقعیت علامت مشاهده شده می باشد. فرض می کنیم $v(t)$ بصورت زیر باشد.

$$v(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \omega_0 = 120 \pi$$

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستمها

چشم بدلیل محدودیت های فیزیکی نمی تواند نوسانات ۶۰ هرتز را مشاهده نماید. می توان این پدیده را با مدل کردن چشم بصورت یک فیلتر پایین گذر ایده آل در نظر گرفت. فرکانس قطع این فیلتر را می توان ۲۰ هرتز در نظر گرفت.

عمل نمونه برداری از $v(t)$ را می توان به کمک یک چراغ چشمک زن مدلسازی کرد. بنابراین اگر $s(t)$ بیانگر چراغ چشمک زن باشد داریم

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

که در آن $\frac{1}{T_s}$ فرکانس چشمک های چراغ بر حسب هرتز است.

سیگنال نمونه برداری شده اکنون حاصل ضرب $r(t) = v(t)s(t)$ می باشد. مطلوبست

الف) تبدیل فوریه $v(t)$.

ب) تبدیل فوریه $s(t)$. اثر T_s را در آن مشخص کنید.

ج) طبق نظریه نمونه برداری، ماکزیمم مقدار T_s را جهت نمونه برداری موفقیت آمیز از $v(t)$ تعیین کنید. توجه کنید که بعد از نمونه برداری باید بتوان $v(t)$ را از روی نمونه های آن توسط یک فیلتر پایین گذر بازسازی کرد. طیف $r(t)$ را هنگامی که T_s کمی کمتر از مقدار تعیین شده در فوق باشد رسم کنید.

د) اگر $\omega_s = \omega_0 + 20\pi$ باشد، فرکانس مجازی مشاهده شده چیست.

ه) قسمت د) را برای $\omega_s = \omega_0 - 2\pi$ تکرار کنید.