

فصل چهارم

تبدیل فوریه گسسته زمان

مقدمه

روش های پیوسته زمان که در فصل ۳ مورد بررسی قرار گرفتند، دارای اهمیت زیادی هستند. در حقیقت این ابزارها به همراه نوع گسسته زمان آن تشکیل یک زوج ابزار قوی و کارآمد را در تجزیه و تحلیل سیستم های LTI می دهند. اگرچه وجوه تشابه زیادی میان تبدیل فوری پیوسته زمان و گسسته زمان وجود دارد، اما هنوز تفاوت های عمده ای میان این دو نوع وجود دارد که ناشی از ماهیت متفاوت آنهاست.

در این فصل بر آن نیستیم که از لحاظ تاریخی، منشأ تبدیل فوری گسسته زمان را مورد بررسی قرار دهیم. اما واضح است که تبدیل فوری اساساً برای سیگنال های پیوسته زمان ارائه شده است و بعدها با توجه به کاربرد وسیع دنباله های گسسته زمان، نوع دیگری از این تبدیل که مناسب برای استفاده در حالت گسسته زمان است، ارائه شده است. لذا منطقی است که بتوان با ایجاد برخی تناظرها و با استفاده از تعاریف و خواص حالت پیوسته زمان، تعاریف و خواص متناظر برای حالت گسسته زمان را بدست آورد.

از لحاظ مفهوم، شناخت و درک برخی خواص در حوزه پیوسته زمان بسیار ساده تر و بدیهی تر از نوع گسسته زمان آن است. به عنوان مثال مفهوم پایین گذر یا بالاگذر بودن طیف یک سیگنال در حالت پیوسته زمان کاملاً بدیهی است. به عبارت دیگر اگر طیف سیگنال بیشتر در حوالی فرکانس های پایین و صفر متمرکز باشد، آن سیگنال پایین گذر است و متناسب با میزان دور بودن محل طیف از فرکانس های حوالی صفر، سیگنال میان گذر و یا بالاگذر می شود. اما در مورد سیگنال های گسسته زمان، طیف حوزه فرکانس متناوب است و در فاصله فرکانسی 2π مرتباً تکرار می شود، لذا تعریف پایین گذر یا بالاگذر بودن باید دقیق تر اعمال گردد. در این مورد اگر طیف سیگنال حول مضارب زوج $\pi, (2k\pi)$ متمرکز باشد، سیگنال پایین گذر است و اگر طیف سیگنال حول مضارب فرد $\pi, (2k+1)\pi$ متمرکز باشد، سیگنال بالاگذر است.

در این فصل پس از بررسی مختصری بر روی دنباله های متفاوت و استخراج ضرایب سری فوریه، توجه خاص خود را به تبدیل فوریه و بررسی خواص آن متمرکز می کنیم. در این رهگذر ضرایب DFT یک دنباله را تعریف کرده و از آن در محاسبه کانولوشن از کامپیوتر کمک می گیریم. با توجه به اهمیت تفاوت ها و شباهت های روش های پیوسته و گسسته زمان در تمام مراحل فوق و به مناسبت، از این تفاوت ها و شباهت ها صحبت به میان خواهیم آورد و قسمت خاصی را به آن اختصاص خواهیم داد و در انتهای فصل به بررسی روش های ساخت سیستم های مختلف گسسته زمان LTI به کمک بلوک های اساسی می پردازیم.

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

۱-۴ توابع ویژه سیستم‌های LTI گسسته زمان

مراحل نمایش فوریه در حالت گسسته زمان (یا به عبارت دیگر مراحل نمایش یک دنباله (تابع) دلخواه به صورت ترکیب خطی توابع نمایی مختلط)، با آنچه در حالت پیوسته زمان انجام دادیم، یکسان است. نشان می‌دهیم که دنباله‌های مختلط نمایی، توابع ویژه برای سیستم‌های LTI گسسته زمان هستند. به عنوان مثال فرض کنید که یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ دارای ورودی زیر باشد.

$$x[n] = z^n \quad (۱-۴)$$

که در آن z یک عدد مختلط است. خروجی سیستم را می‌توان از جمع کانولوشن بدست آورد.

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^n h[k]z^{-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} \end{aligned} \quad (۲-۴)$$

در این جا دیده می‌شود که اگر ورودی $(x[n])$ یک تابع نمایی مختلط مثل تابع (۱-۴) باشد، خروجی نیز شامل همان تابع نمایی مختلط خواهد بود که در یک ضریب ثابت (که تابع مقدار z است) ضرب شده است.

$$y[n] = H(z)z^n \quad (۳-۴)$$

که در آن

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} \quad (۴-۴)$$

در اینجا $H(z)$ مقدار ویژه مربوط به تابع ویژه z^n خواهد بود.

در حالت کلی‌تر می‌بینیم که معادله (۳-۴) با توجه به خاصیت جمع اثر که در مورد سیستم‌های LTI صادق است، روشن‌گر این مطلب است که نمایش سیگنال‌ها برحسب توابع نمایی مختلط می‌تواند ما را به عبارت‌های مناسبی برای پاسخ یک سیستم LTI راهنمایی کند. بدین صورت که اگر ورودی یک سیستم LTI گسسته به صورت ترکیب خطی از توابع نمایی مختلط نمایش داده شود، یعنی اگر $x[n]$ به صورت زیر نوشته شود:

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \quad (۵-۴)$$

در آن صورت خروجی با توجه به خاصیت جمع آثار و رابطه (۳-۴) به صورت زیر بیان می‌گردد

$$y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n \quad (۶-۴)$$

به عبارت دیگر خروجی را می‌توان به صورت ترکیب خطی از همان دنباله‌های مختلط نمایش داد که در تولید $x[n]$ به صورت مجموع (۵-۴) شرکت داشته‌اند، با این تفاوت که علاوه بر ضرایب a_k که

¹ Eigen Function

مربوط به بسط ورودی بر حسب توابع نمایی هستند، باید ضریب $H(z_k)$ را نیز به عنوان مقدار ویژه تابع z_k^n اضافه کرد.

مشابه روش فصل سوم ما بحث خود را به توابعی به صورت $e^{j\Omega n}$ (به عبارت دیگر z^n با $|z|=1$) محدود می کنیم. در فصل هفتم حالت کلی را در نظر خواهیم گرفت.

در قسمت های بعدی ابتدا نمایش فوریه سیگنال های تناوبی را در نظر خواهیم گرفت و در قسمت (۴-۳) تبدیل فوریه گسسته زمان را به عنوان تعمیمی از سری فوریه، دقیقاً مشابه آنچه در بخش (۴-۳) انجام دادیم، مطرح خواهیم کرد. روش کار دقیقاً مشابه روش پیوسته زمانی است که در فصل سوم بحث شده است. همانگونه که قبلاً اشاره شد میان حالت پیوسته و گسسته زمانی شاهد اختلافات و تشابهات مهمی خواهیم بود که به تفصیل به بررسی هر یک خواهیم پرداخت.

۲-۴ نمایش دنباله های متناوب

۱-۲-۴ ترکیب خطی نمایی های مختلط

همانگونه که در فصل ۲ توضیح داده شد، یک دنباله گسسته زمان $x[n]$ تناوبی است اگر بازاء عدد ثابت و مثبت N داشته باشیم.

$$x[n] = x[n + N] \quad (۷-۴)$$

به عنوان مثال همان گونه که در قسمت (۳-۴-۲) دیدیم، تابع نمایی مختلط به صورت $e^{j\frac{2\pi}{N}n}$ تناوبی با دوره تناوب N می باشد. بعلاوه مجموعه دنباله های نمایی مختلط که با دوره N تناوبی هستند، به صورت زیر قابل نمایش هستند.

$$\phi_k[n] = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۸-۴)$$

فرکانس زاویه ای همه این دنباله ها ضربی از فرکانس زاویه ای اصلی $\frac{2\pi}{N}$ است. بنابراین همه این سیگنال ها را می توان به عنوان هم آهنگ های^۲ مختلف این فرکانس زاویه ای تلقی کرد.

اختلاف مهم میان مجموعه سیگنال های هم آهنگ در حالت پیوسته و گسسته زمان این است که تمامی سیگنال های موجود در مجموعه سیگنال ها، در حالت پیوسته زمان که در معادله (۳-۱۲) داده شده اند، مجزا و دارای فرکانس مخصوص به خود هستند، ولی در مجموعه دنباله های گسسته زمان (۴-۷) تنها N دنباله مجزا با فرکانس مخصوص به خود دیده می شود. دلیل این امر نیز واضح است چون تمامی دنباله هایی که فرکانس زاویه ای آنها ضربی از 2π با هم تفاوت دارند، مشابه هستند. یعنی

$$e^{j(\Omega+2\pi r)n} = e^{j\Omega n} e^{j2\pi rn} = e^{j\Omega n} \quad (۹-۴)$$

نتیجه مستقیم این می بحث این است که $\phi_1[n] = \phi_{N+1}[n], \phi_0[n] = \phi_N[n]$ و در حالت کلی تر

$$\phi_k[n] = \phi_{k+rN}[n] \quad (۱۰-۴)$$

^۲ Harmonics

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

یعنی هنگامی که k با ضریب صحیحی از N تغییر کند، دوباره همان دنباله قبلی تولید خواهد شد. اکنون می خواهیم یک دنباله تناوبی دلخواه را به صورت مجموعی از دنباله های $\phi_k[n]$ بنویسیم.

$$x[n] = \sum_k a_k \phi_k[n] = \sum_k a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \quad (۱۱-۴)$$

از آنجائیکه $\phi_k[n]$ فقط به ازاء N مقدار متوالی از k تولید دنباله های مجزا می کند، مجموع (۱۱-۴) فقط احتیاج به N عبارت متوالی دارد، یعنی

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk \left(\frac{2\pi}{N}\right) n} \quad (۱۲-۴)$$

به عنوان مثال می توان k را در محدوده $k=0,1,2,\dots,N$ و یا $k=3,4,\dots,N+2$ متغیر فرض کرد. توجه شود که در اینجا فرض شده است که بتوان $x[n]$ را به صورت مجموع (۱۲-۴) بسط داد، بنابراین در مورد شرایط وجود سری فوریه یا به عبارت دیگر شرط همگرایی سری (۱۲-۴) به $x[n]$ بحث نخواهیم کرد. در جای خود شرایط وجود سری فوریه گسسته زمان را با استفاده از شرایط وجود سری فوریه پیوسته زمان ارائه می کنیم. همچنین لازم به ذکر است که سری فوریه پیوسته زمان در حالت کلی یک سری نامتناهی است (با تعداد جملات نامتناهی)، در حالیکه سری فوریه گسسته زمان یک سری متناهی است. بنابراین تحقیق شرط همگرایی برای سری فوریه گسسته زمان^۳ بسیار ساده تر است.

معادله (۱۲-۴) را به عنوان سری فوریه گسسته زمانی و ضرایب a_k را به عنوان ضرایب سری فوریه می شناسند. همانگونه که اشاره شد در حالت گسسته زمانی این مجموع محدود است که نتیجه مستقیم رابطه (۱۰-۴) است.

۲-۲-۴ تعیین سری فوریه دنباله های متناوب

اکنون فرض کنید که یک دنباله به نام $x[n]$ با دوره تناوب N داشته باشیم. می خواهیم ببینیم آیا می توان $x[n]$ را به صورت مجموع (۱۲-۴) نوشت. در صورت مثبت بودن جواب، می خواهیم a_k را تعیین کنیم. این سوال را می توان به صورت پیدا کردن جواب برای یک مجموعه معادلات خطی مطرح کرد.

اگر معادله (۱۲-۴) را برای مقادیر متوالی n محاسبه کنیم، داریم.

³ Discrete Fourier Series

$$\begin{aligned} x[0] &= \sum_{k=-N}^N a_k \\ x[1] &= \sum_{k=-N}^N a_k e^{j\frac{2\pi}{N}k} \\ &\vdots \\ x[N-1] &= \sum_{k=-N}^N a_k e^{j2\pi k(N-1)/N} \end{aligned} \quad (۱۳-۴)$$

از آنجا که هر دو طرف معادله با دوره تناوب N ، متناوب هستند، رابطه $x[N]$ مشابه $x[0]$ خواهد شد. بنابراین معادله (۱۳-۴) نمایش دهنده یک مجموعه از N معادله و N مجهول a_k می باشد. می توان نشان داد که این مجموعه N معادله ای به صورت خطی مستقل هستند و بنابراین جهت بدست آوردن a_k بر حسب مقادیر معلوم $x[n]$ قابل حل می باشند. اما رابطه ساده تری جهت تعیین a_k نیز وجود دارد. برای بدست آوردن این رابطه استفاده از معادله زیر مفید است.

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \dots \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (۱۴-۴)$$

رابطه فوق مشابه حالت پیوسته زمان زیر است.

$$\int_0^T e^{jk(\frac{2\pi}{T})t} dt = \begin{cases} T & k = 0 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (۱۵-۴)$$

برای بدست آوردن رابطه (۱۴-۴) از مجموع زیر استفاده کردیم.

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases} \quad (۱۶-۴)$$

همچنین می دانیم تابع $e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ فقط گاهی که k ضربی از N باشد مساوی واحد است. اگر α را مساوی $e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ بگیریم، داریم.

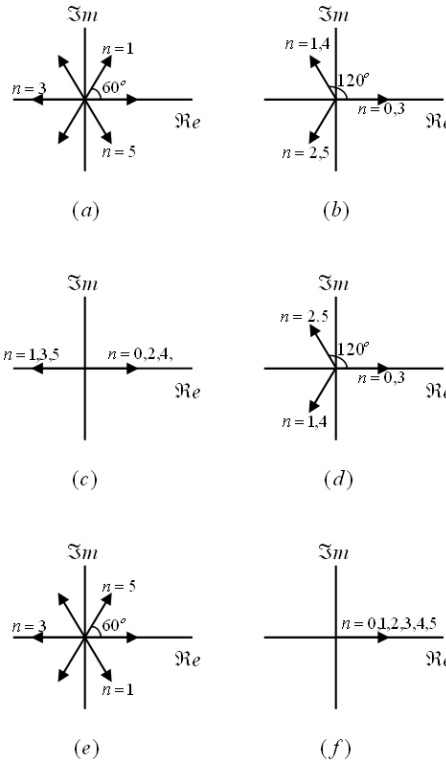
$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{1-e^{jk\frac{2\pi}{N}N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (۱۷-۴)$$

از آنجایی که نمایی های مختلط در مجموع (۱۴-۴) متناوب با دوره تناوب N می باشند، تساوی مطرح شده در معادله (۱۴-۴) برای هر مجموعی که در فاصله N گرفته شود، صادق است.

$$\sum_{n=r}^{r+N-1} e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \dots \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (۱۸-۴)$$

فصل چهارم: تبدیل فوری گسسته زمان

نمایش تصویری معادله (۱۸-۴) در شکل (۱-۴) برای $N = 6$ داده شده است (به ازاء k های مختلف) در این شکل اعداد مختلط به صورت بردارهایی در صفحه مختلط داده شده اند که طول همه آنها واحد است و زاویه آنها $\frac{2\pi}{6}n$ می باشد که $n = 0, 1, 2, \dots, 5$.



شکل (۱-۴): دنباله های نمایی مختلط $\phi_k[n] = e^{jk(\frac{2\pi}{6})n}$ در یک دوره تناوب بازاء مقادیر مختلف k .

$$k = 6(f) \quad k = 5(e) \quad k = 4(d) \quad k = 3(c) \quad k = 2(b) \quad k = 1(a)$$

از حالت تقارن هر یک از این شکل ها می توان دید که مجموع $e^{jk\frac{2\pi}{6}n}$ در یک دوره تناوب صفر است به جز هنگامی که $k = 0, 6, 12$ است که در حالت اخیر همه بردارها روی هم می افتند و به طور عددی با هم جمع می شوند.

اکنون سری فوری معادله (۱۲-۴) را در نظر گرفته، هر دو طرف را در $e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n}$ ضرب کرده و در یک دوره تناوب N جمع می زنیم. طبق روابط (۱۴-۴) تا (۱۸-۴) نتیجه حاصل Na_k خواهد بود چون

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} = \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} \quad (۱۹-۴)$$

با تعویض مرتبه جمع در سمت راست داریم.

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(\frac{2\pi}{N})n(k-r)} \quad (20-4)$$

باتوجه به معادله (۱۸-۴) مجموع دوم در طرف راست مساوی صفر است مگر در مواقعی که $k-r$ مساوی صفر یا مضرب صحیحی از N باشد. بنابراین اگر r در محدوده تغییرات k وجود داشته باشد، در آنصورت معادله (۴-۲۰) مساوی N است اگر $k=r$ و مساوی صفر است اگر $k \neq r$. پس سمت راست مساوی Na_r می شود و به این ترتیب a_r بدست می آید.

$$a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} \quad (21-4)$$

بنابراین ما زوج سری فوریه (۲۲-۴) و (۲۳-۴) را به ترتیب به عنوان معادلات ترکیب و تحلیل خواهیم داشت.

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (22-4)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (23-4)$$

ضرایب سری فوریه a_k را اغلب به عنوان ضرایب طیفی $x[n]$ می نامند. این ضرایب، $x[n]$ را به صورت N دنباله هماهنگ نمایش می دهند. با توجه به معادله (۱۲-۴) می بینیم که اگر k در محدوده 0 تا $N-1$ تغییر کند، می توان $x[n]$ را به صورت زیر نوشت.

$$x[n] = a_0 \phi_0[n] + a_1 \phi_1[n] + \dots + a_{N-1} \phi_{N-1}[n] \quad (24-4)$$

و اگر k در محدوده 1 تا N تغییر کند، می توان $x[n]$ را به صورت زیر نشان داد.

$$x[n] = a_1 \phi_1[n] + a_2 \phi_2[n] + \dots + a_N \phi_N[n]$$

اما چون $\Phi_0[N] = \Phi_N[n]$ ، $a_0 = a_N$ می باشد پس باید $a_0 = a_N$ شود. بنابراین

$$a_k = a_{k+N} \quad (25-4)$$

بنابراین ضرایب سری فوریه نیز متناوب بوده و دوره تناوب آنها نیز همان دوره تناوب دنباله مربوطه می باشد.

مثال (۱-۴): سری فوریه دنباله $x[n] = \sin \Omega_0 n$ را بیابید اگر

حل: این دنباله در صورتی متناوب است که $\Omega_0 = 2\pi \frac{m}{N}$ باشد (N, m هر دو عدد صحیح هستند).

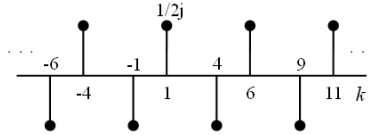
پس

$$x[n] = \frac{1}{j2} e^{j(\frac{2\pi}{N}m)n} - \frac{1}{j2} e^{-j(\frac{2\pi}{N}m)n}$$

از مقایسه با رابطه (۲۲-۴) داریم.

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

$$a_m = \frac{1}{j2}, \quad a_{-m} = -\frac{1}{j2}$$



شکل (۴-۲): نمایش ضرایب سری فوریه $x[n]$ در حالت $N=5, m=1$.

و بقیه ضرایب در فاصله جمع بندی صفر هستند. همانطور که گفتیم این ضرایب با دوره تناوب N

تکرار می شوند. مثلاً اگر $m=1, N=5$ باشند: $a_1 = a_6, a_{-1} = a_4$

اگر $N=5, m=3$ باشد $x[n]$ را به صورت زیر خواهیم داشت.

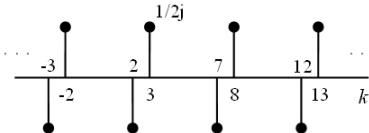
$$x[n] = \frac{1}{j2} e^{j(\frac{2\pi}{5})3n} - \frac{1}{j2} e^{-j(\frac{2\pi}{5})3n}$$

در نتیجه داریم

$$a_3 = \frac{1}{j2}, \quad a_{-3} = -\frac{1}{j2}$$

و با استفاده از خاصیت تناوبی داریم.

$$a_{-3+5} = a_2 = -\frac{1}{j2}, \quad a_{3-5} = a_{-2} = \frac{1}{j2}$$



شکل (۴-۳): نمایش ضرایب سری فوریه $x[n]$ در حالتی که $m=1, N=5$ باشد.

مثال (۴-۲): سری فوریه دنباله زیر را بیابید.

$$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right)$$

حل: سیگنال فوق تناوبی با دوره تناوب N است. بابت $x[n]$ داریم.

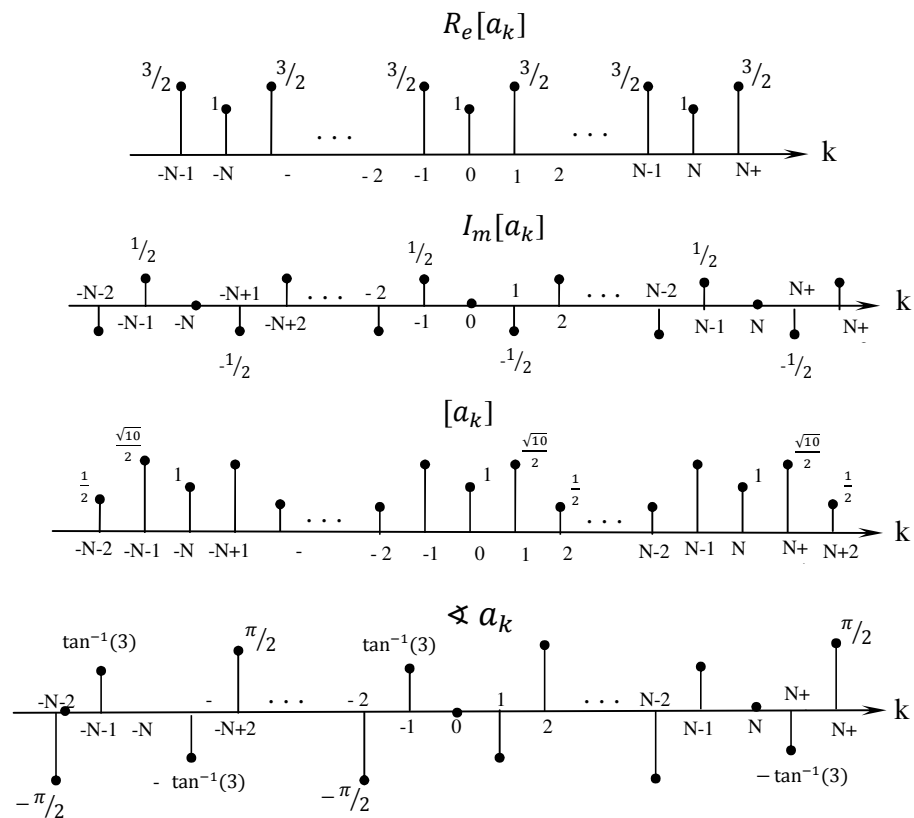
$$\begin{aligned} x[n] &= 1 + \frac{1}{j2} \left[e^{j(\frac{2\pi}{N})n} - e^{-j(\frac{2\pi}{N})n} \right] + \frac{3}{2} \left[e^{j(\frac{2\pi}{N})n} + e^{-j(\frac{2\pi}{N})n} \right] + \\ &\quad \frac{1}{2} \left[e^{j\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)2n + \frac{\pi}{2}\right]} + e^{-j\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)2n + \frac{\pi}{2}\right]} \right] \\ &= 1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{j2} \right) e^{j(\frac{2\pi}{N})n} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{j2} \right) e^{-j(\frac{2\pi}{N})n} + \frac{1}{2} e^{j\pi/2} e^{j(\frac{2\pi}{N})2n} + \\ &\quad \frac{1}{2} e^{-j\pi/2} e^{-j(\frac{2\pi}{N})2n} \end{aligned}$$

بنابراین ضرایب سری فوریه بدست می آیند.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{j2}, \quad a_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{j2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} e^{j\pi/2} = \frac{j}{2}, \quad a_{-2} = \frac{1}{2} e^{-j\pi/2} = -\frac{j}{2}$$

که به صورت های زیر می توان آن را نمایش داد.



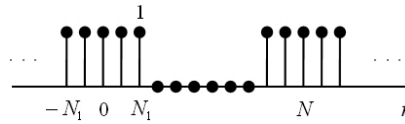
شکل (۴-۴): (a) قسمت های حقیقی و موهومی ضرایب سری فوریه مثال (۴-۲) (b) دامنه همان ضرایب توجه کنید که در مثال، $a_{-k} = a_k^*$ برای تمام مقادیر k صادق است. البته این تساوی هنگامی صادق است که $x[n]$ حقیقی باشد.

مثال (۴-۳): برای دنباله مربعی به صورت شکل (۴-۵) مطلوبست تعیین ضرایب سری فوریه.

حل: با استفاده از رابطه (۴-۲۲) داریم

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان



شکل (۴-۵): دنباله مربعی

چون فقط $2N_1 + 1$ جمله داریم. اگر m را مساوی $n + N_1$ قرار دهیم:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk \left(\frac{2\pi}{N} \right) (m - N_1)} \\ &= \frac{1}{N} e^{jk \left(\frac{2\pi}{N} \right) N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk \frac{2\pi}{N} m} \\ &= \frac{1}{N} e^{jk \left(\frac{2\pi}{N} \right) N_1} \frac{1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N} (2N_1 + 1)}}{1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N}}} \\ &= \frac{1}{N} \frac{e^{jk \frac{2\pi}{N} N_1} - e^{-jk \frac{2\pi}{N} (N_1 + 1)}}{1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N}}} \\ &= \frac{1}{N} \frac{e^{-jk \frac{2\pi}{2N}} e^{jk \frac{2\pi}{N} [N_1 + 1/2]} - e^{-jk \frac{2\pi}{N} [N_1 + 1/2]}}{e^{jk \frac{2\pi}{2N}} - e^{-jk \frac{2\pi}{2N}}} \end{aligned}$$

بنابراین می توان ضرایب سری فوریه یک دنباله مربعی را به صورت زیر نوشت.

$$a_k = \frac{1}{N} \frac{\sin \left[k \left(\frac{2\pi}{N} \right) (N_1 + 1/2) \right]}{\sin \left[k \left(\frac{2\pi}{2N} \right) \right]} \quad k \neq 0, \pm N, \dots \quad (\text{a-۲۶-۴})$$

$$a_k = \frac{1}{N} (2N_1 + 1) \quad k = 0, \pm N, \dots \quad (\text{b-۲۶-۴})$$

عبارتی را که برای ضرایب سری فوریه بدست آوریم می توانیم به صورت ضرایبی از نمونه های پوش تابع زیر فرض کنیم.

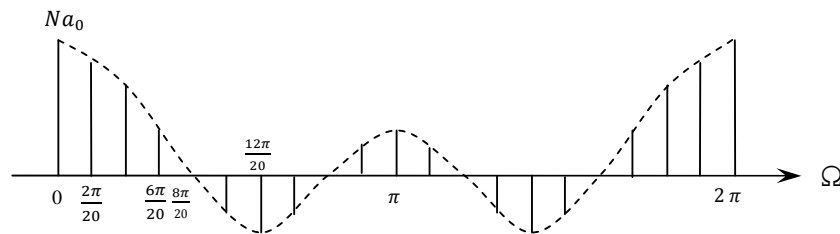
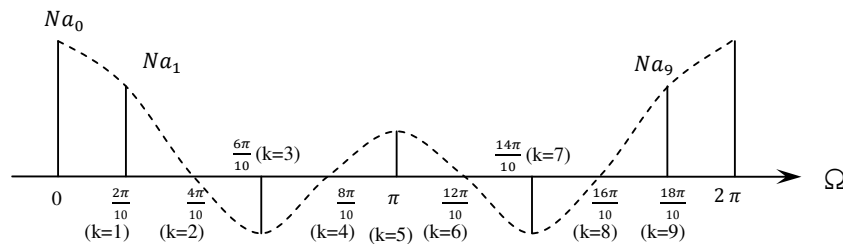
$$Na_k = \frac{\sin \left[(2N_1 + 1) \frac{\Omega}{2} \right]}{\sin \left(\frac{\Omega}{2} \right)} \bigg|_{\Omega = \frac{2\pi}{N} k} \quad (\text{۲۷-۴})$$

در شکل (۴-۶) ضرایب Na_k برای $2N_1 + 1 = 5$ و $N = 10, 20$ رسم شده اند.

با افزایش N و ثابت بودن N_1 پوش Na_k ثابت می ماند اما فاصله نمونه هایی که برای محاسبه ضرایب سری فوریه به کار برده می شوند، کمتر می شود. توجه شود که در حالت پیوسته زمان پوش بدست آمده برای یک پالس مربعی یک تابع $Sinc$ بود ولی در اینجا و در مورد دنباله مربعی به دلیل تناوبی

بودن ضرایب سری فوریه یک $Sinc$ بدست نمی آید. بنابراین معادل گسسته زمان یک تابع $Sinc$ به صورت $\frac{\sin[\beta n]}{\sin[n]}$ خواهد بود.

یکی دیگر از تفاوت های سری فوریه گسسته و پیوسته زمان در این است که در حالت پیوسته زمان برای یک سیگنال موج مربعی متقارن دیدیم که هر چه تعداد عبارات مجموع سری فوریه به سمت ∞ میل می کرد، مجموع به سمت موج مربعی میل می کرد ولی در نقاط ناپیوستگی پدیده گیبس^۱ مشاهده می شد. اما در حالت گسسته زمان تعداد جملات سری فوریه محدود و همچنین پدیده گیبس مشاهده نمی شود.



شکل (۴-۶): ضرایب سری فوریه مربوط به دنباله مربعی بازاء

$$N = 40(c) \quad N = 20(b) \quad N = 10(a), 2N_1 + 1 = 5$$

بنابراین با توجه به شکل (۴-۶) دیده می شود که با افزایش N یا دوره تناوب، طیف ضرایب سری فوریه به سمت یک طیف پیوسته میل می کند و این کاملاً منطقی و قابل پیش بینی می باشد، چرا که با

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

افزایش دوره تناوب و میل کردن آن به سمت مقادیر خیلی بزرگ دنباله، $x[n]$ به یک دنباله محدود تبدیل خواهد شد و بعدها خواهیم دید که دنباله های دوره محدود، دارای طیف پیوسته می باشند. یکی دیگر از مهمترین تشابهات بین سیستم های پیوسته و گسسته ناشی از این حقیقت است که نمایی های مختلط، توابع ویژه برای سیستم های LTI پیوسته و گسسته زمان می باشند. فرض کنید $x[n]$ ورودی یک سیستم LTI گسسته زمان با پاسخ ضربه $h[n]$ باشد. اگر $x[n]$ یک دنباله متناوب با دوره تناوب N باشد، با توجه به خاصیت خطی بودن سیستم انتظار داریم که پاسخ سیستم $y[n]$ نیز متناوب باشد. هدف، ارائه رابطه برای ضرایب سری فوریه خروجی بر حسب ضرایب سری فوریه ورودی است. ابتدا بسط دنباله $x[n]$ را بر حسب ضرایب سری فوریه می نویسیم.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (۲۸-۴)$$

اگر پاسخ ضربه سیستم $h[n]$ باشد، می توان با استفاده از (۴-۶) رابطه زیر را برای خروجی نوشت.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(\frac{2\pi k}{N}) e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (۲۹-۴)$$

بنابراین ضرایب سری فوریه خروجی به صورت $a_k H(\frac{2\pi k}{N})$ هستند که در آن

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k} h[n] \quad (۳۰-۴)$$

بنابراین

$$H(\frac{2\pi k}{N}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (۳۱-۴)$$

برای توضیح بیشتر به مثال زیر توجه کنید.

مثال (۴-۵): فرض کنیم پاسخ ضربه سیستم LTI به صورت $h[n] = \alpha^n u[n]$ باشد که در آن $-1 < \alpha < 1$ است. اگر ورودی این سیستم به صورت $x[n] = \cos(\frac{2\pi}{N})n$ باشد، مطلوبست خروجی سیستم و سری فوریه آن.

حل: ابتدا ورودی را به صورت سری فوریه بسط می دهیم.

$$x[n] = \frac{1}{2} e^{-j(\frac{2\pi}{N})n} + \frac{1}{2} e^{j(\frac{2\pi}{N})n}$$

با توجه به پاسخ ضربه سیستم و رابطه (۴-۳۱) داریم.

$$H(\frac{2\pi}{N}k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\alpha e^{-jk(\frac{2\pi}{N})} \right]^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}$$

بنابراین می توان خروجی را به صورت سری فوریه نوشت.

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2} H\left(\frac{2\pi}{N}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} H\left(-\frac{2\pi}{N}\right) e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}}} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{j\frac{2\pi}{N}}} \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \end{aligned}$$

اگر فرض کنیم.

$$\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}}} = r e^{j\theta}$$

در آن صورت داریم.

$$y[n] = \frac{1}{2} r e^{j\theta} e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} r e^{-j\theta} e^{-j\frac{2\pi}{N}n} = r \cos\left(\frac{2\pi}{N}n + \theta\right)$$

۳-۴ دنباله های غیرمتناوب-تبدیل فوریه گسسته زمان (DTFT)

در مثال (۳-۴) و در شکل (۴-۶) دیدیم که با افزایش دوره تناوب فاصله این نمونه ها از هم کمتر می شود. با مشاهدات مشابه در مورد سیگنال های پیوسته زمان توانستیم با افزایش دوره تناوب به سمت ∞ نمایش تبدیل فوریه را برای یک سیگنال غیرمتناوب ارائه کنیم. در این فصل دقیقاً همان عملیات را پیش می گیریم و ابتدا تابع $\tilde{x}[n]$ متناوب را به گونه ای تعریف می کنیم که در یک دوره تناوب مساوی سیگنال غیرمتناوب باشد.

فرض می کنیم $x[n]$ در فاصله $|n| > N_1$ مساوی صفر باشد. هرچه دوره تناوب N بیشتر می شود، در ناحیه بزرگتری می توان $x[n]$ را با $\tilde{x}[n]$ مساوی گرفت و اگر N به سمت بینهایت ∞ میل کند آنگاه $\tilde{x}[n] = x[n]$ می گردد.

اکنون سری فوریه $\tilde{x}[n]$ را در نظر بگیرید.

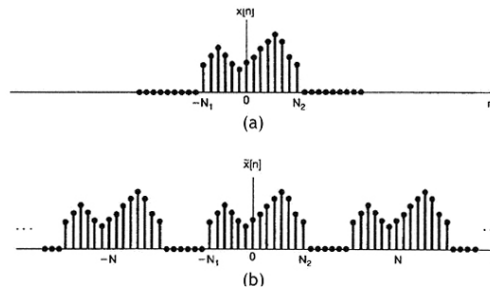
$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad (32-4)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[n] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad (33-4)$$

از آنجا که در یک دوره تناوب که شامل $|n| \leq N_1$ است، $x[n]$ مساوی $\tilde{x}[n]$ است، مناسب است که حدود مجموع را در فاصله مذکور در نظر بگیریم. در این صورت می توان جای $\tilde{x}[n]$ را با $x[n]$ عوض کرد و نوشت.

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} \tilde{x}[n] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad (34-4)$$

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان



شکل (۴-۷): (a) سیگنال با دوره محدود $x[n]$

(b) سیگنال تناوبی $\tilde{x}[n]$ که در یک دوره تناوب با $x[n]$ مساوی است

اگر دوره تناوب N به سمت بینهایت میل کند، در آن صورت $k \frac{2\pi}{N}$ مقادیر پیوسته را اتخاذ می کند و

اگر چه a_k به سمت صفر میل می کند ولی Na_k مقادیر محدود غیر صفر را اتخاذ می کند.

اکنون پوش $X(\Omega)$ مربوط به Na_k را به صورت رابطه (۴-۳۵) می نویسیم.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (4-35)$$

در رابطه (۴-۳۵)، $\Omega = k \frac{2\pi}{N}$ مقادیر پیوسته را اتخاذ می کند. رابطه فوق تبدیل فوریه مستقیم نامیده

می شود. بنابراین می توان ضرایب فوریه دنباله $\tilde{x}[n]$ (که از تکرار مداوم $x[n]$ با دوره تناوب N واحد بدست می آید) را از رابطه (۴-۳۵) بدست آورد.

$$Na_k = X(\Omega) \Big|_{\Omega = \frac{2\pi}{N} k} \quad (4-36)$$

$$a_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0) \quad (4-37)$$

که در آن $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ می باشد.

بنابراین ضرایب a_k متناسب با نمونه های متساوی الفاصله از تابع پوش می باشند. از ترکیب معادلات (۴-۳۲) و (۴-۳۷) داریم.

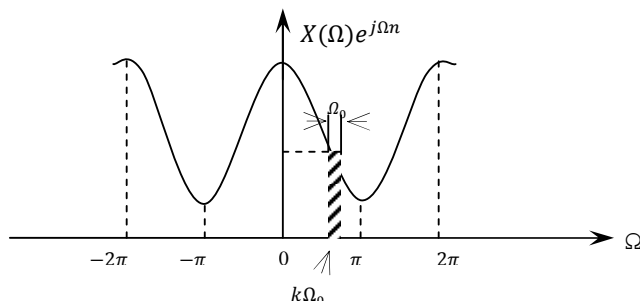
$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \quad (4-38)$$

از آنجائیکه $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ یا $\frac{1}{\Omega_0} = \frac{N}{2\pi}$ است، معادله (۴-۳۸) را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0 \quad (4-39)$$

هنگامیکه $N \rightarrow \infty$ آنگاه $\Omega_0 \rightarrow 0$ و $k\Omega_0$ مقادیر پیوسته را اتخاذ می کند. بنابراین $\tilde{x}[n]$ برای هر مقدار محدود n مساوی $x[n]$ خواهد شد و از اینجا می توان رابطه تبدیل معکوس فوریه گسسته زمان را بدست آورد. در حالت حدی مذکور، معادله (۴-۳۹) در فاصله یک دوره تناوب به انتگرال تبدیل

می شود. برای واضح تر شدن مطلب فرض کنید $X(\Omega)e^{j\Omega n}$ به صورت نمایش داده شده در شکل (۴-۸) باشد.



شکل (۴-۸): نمایش معادله (۴-۳۹)

از معادله (۴-۳۵) پی می بریم که $X(\Omega)$ متناوب و دوره تناوب آن 2π است. همچنین $e^{j\Omega n}$ نیز متناوب با دوره تناوب 2π است. بنابراین حاصل ضرب $X(\Omega)e^{j\Omega n}$ نیز تناوبی با دوره تناوب 2π است. همانگونه که از شکل پیداست، هر عبارت در مجموع (۴-۳۹) نمایانگر مساحتی به ارتفاع $X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$ و پهنای Ω_0 است.

هنگامی که $\Omega_0 \rightarrow 0$ مجموع تبدیل به انتگرال شده و $x[n] = \tilde{x}[n]$ می شود. بنابراین رابطه (۴-۳۹) به صورت زیر تبدیل می شود.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (۴-۴۰)$$

محدوده انتگرال گیری دلخواه ولی طول آن 2π است. بنابراین زوج تبدیل فوریه زیر را بدست آوردیم.

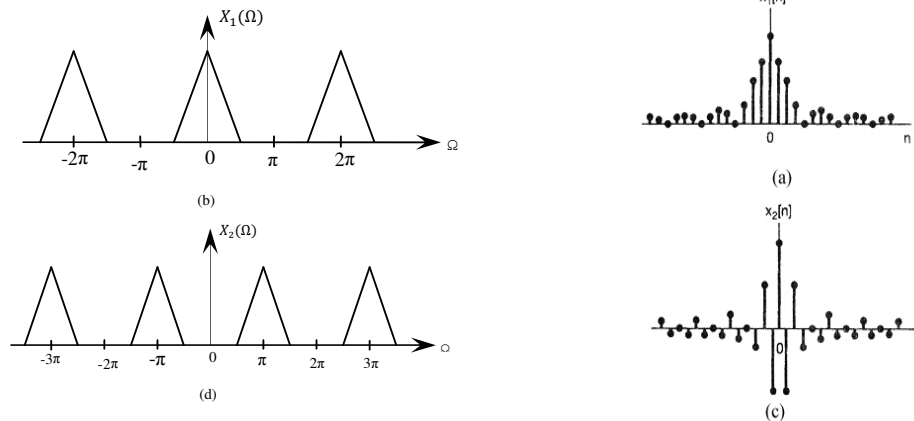
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (۴-۴۱)$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (۴-۴۲)$$

$X(\Omega)$ را معمولاً طیف $x[n]$ می نامند و متناوب با دوره تناوب 2π می باشد و این یکی از تفاوت های تبدیل فوریه گسسته و پیوسته زمان می باشد. تبدیل فوریه سیگنال پیوسته زمان غیرمتناوب است در حالیکه تبدیل فوریه دنباله گسسته زمان متناوب است و دوره تناوب آن در حوزه فرکانس مستقل از نوع و شکل دنباله گسسته زمان، مساوی 2π است. تفاوت دیگر در محدود بودن حدود انتگرال گیری در معادله (۴-۴۱) است که باز ناشی از تناوبی بودن $X(\Omega)$ می باشد. بنابراین چون $\Omega = 2\pi, \Omega = 0$ یک فرکانس را مشخص می کنند، فرکانسهای نزدیک به این مقادیر و یا هر مضرب زوجی از π را فرکانس پایین گویند. همچنین فرکانسهایی که نزدیک مضارب فرد π باشند را فرکانسهای بالا گویند.

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

بنابراین دنباله $x_1[n]$ رسم شده در شکل (۹-۴) بسیار آهسته تر از $x_2[n]$ تغییر میکند و دارای مؤلفه های فرکانسی پایین می باشد که در شکل مشخص شده است.



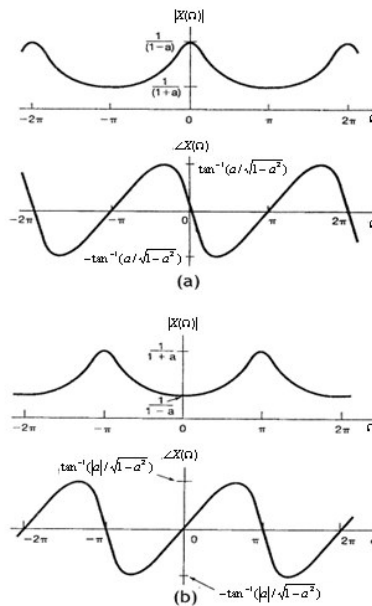
شکل (۹-۴): (a) دنباله گسسته زمان $x_1[n]$ تبدیل فوریه $X_2(\Omega)$ که در حوالی $\Omega = \pm\pi, \pm3\pi$ متمرکز است. مثال (۵-۴): تبدیل فوریه دنباله زیر را بیابید.

$$x[n] = a^n u[n] \quad |a| < 1$$

حل: با استفاده از رابطه (۴۲-۴) داریم.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} [a e^{-j\Omega}]^n = \frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}}$$

دامنه و فاز $X(\Omega)$ در شکل (۱۰-۴) برای $a > 0$ و در شکل (۱۰-۴) برای $a < 0$ نشان داده شده است. توجه می کنیم که در هر دو حالت دوره تناوب 2π است و طیف دامنه زوج و طیف زاویه فرد می باشد. در ضمن توجه می کنیم که اگر $a > 0$ باشد، دنباله فوق در فرکانسهای پایین بیشینه دامنه را خواهد داشت و اگر $a < 0$ باشد در فرکانسهای بالا بیشینه دامنه را خواهد داشت. البته در هر دو حالت لازمه همگرا شدن تبدیل فوریه، شرط $|a| < 1$ می باشد.

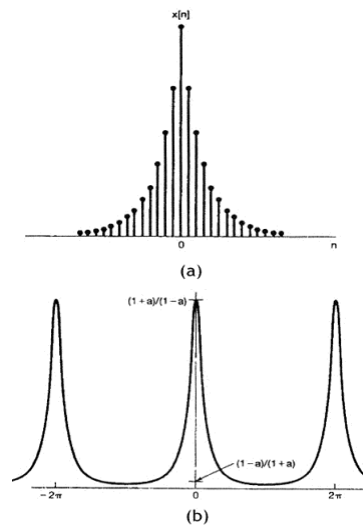


شکل (۴-۱۰): دامنه و زاویه تبدیل فوریه مثال (۴-۵) برای (a) $a > 0$ (b) $a < 0$

مثال (۴-۶): تبدیل فوریه دنباله زیر را بیابید.

$$x[n] = \alpha^{|n|}$$

حل: شکل سیگنال به ازاء $0 < \alpha < 1$ در شکل (۴-۱۱-a) رسم شده است.



شکل (۴-۱۱): (a) سیگنال $x[n]$ مثال (۴-۶) و (b) تبدیل فوریه آن $0 < \alpha < 1$

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

تبدیل فوریه این سیگنال برابر است با

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^{-n} e^{-j\Omega n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha^m e^{j\Omega m} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n e^{-j\Omega n} \\ &= \frac{1}{1 - \alpha e^{j\Omega}} - 1 + \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} = \frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos \Omega + \alpha^2} \end{aligned}$$

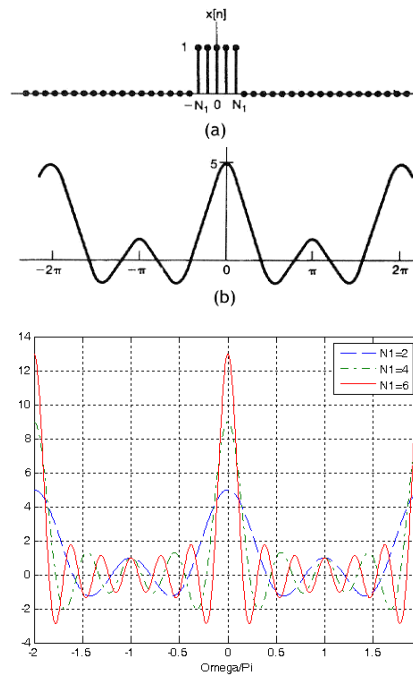
در این حالت $X(\Omega)$ حقیقی و برای $0 < \alpha < 1$ در شکل (۴-۱۱b) رسم شده است.

مثال (۴-۷): تبدیل فوریه پالس مربعی را بدست آورید.

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & |n| > N_1 \end{cases} \quad \text{پالس مربعی:}$$

حل:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-N_1}^{+N_1} e^{-j\Omega n} = \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\Omega(m-N_1)}$$



شکل (۴-۱۲): (a) پالس مربعی مثال (۴-۷) برای $N_1 = 2$ (b) تبدیل فوریه آن برای $N_1 = 2$ (c) مقایسه تبدیل فوریه

پالس مربعی برای سه مقدار مختلف $N_1 = 2, 4, 6$

مجموع دوم به کمک تبدیل زیر از مجموع اول بدست آمده است.

$$m = n + N_1$$

بنابراین می توان نوشت.

این تبدیل در شکل (۴-۱۲) رسم شده است.

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= e^{j\Omega N_1} \frac{1 - e^{-j\Omega(2N_1+1)}}{1 - e^{-j\Omega}} = \frac{e^{j\Omega N_1} - e^{-j\Omega(N_1+1)}}{1 - e^{-j\Omega}} \\ &= \frac{e^{-j\Omega/2} e^{j\Omega(N_1+\frac{1}{2})} - e^{-j\Omega(N_1+\frac{1}{2})}}{e^{-j\Omega/2} e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}} \\ X(\Omega) &= \frac{\sin\Omega(N_1 + \frac{1}{2})}{\sin\frac{\Omega}{2}} \end{aligned}$$

جهت مشاهده تاثیر افزایش طول پالس مربعی طیف این سیگنال به ازاء افزایش N_1 طیف این پالس برای سه مقدار مختلف $N_1 = 2, 4, 6$ در شکل ۴-۱۲ نیز رسم شده است. دیده می شود که با افزایش N_1 طیف سیگنال در حوزه فرکانس بسته تر می شود که به مفهوم کاهش دامنه در فرکانسهای بالاتر است.

۴-۴ دنباله های متناوب و تبدیل فوریه گسسته زمانی

همانند حالت پیوسته زمان، روابط مهمی بین نمایش سری فوریه دنباله های متناوب و تبدیل فوریه دنباله های غیرمتناوب وجود دارد. در این بخش ابتدا نحوه بدست آوردن ضرایب سری فوریه یک دنباله متناوب از روی تبدیل فوریه یک دوره تناوب از آن دنباله را تشریح می کنیم. سپس نشان خواهیم داد که چگونه سری فوریه دنباله های متناوب را می توان به کمک نمایش تبدیل دنباله متناوب به صورت قطار ضربه، در چهار چوب تبدیل فوریه جای داد.

۴-۴-۱ ضرایب سری فوریه به عنوان نمونه های تبدیل فوریه در یک دوره تناوب

فرض کنید که $\tilde{x}[n]$ یک دنباله متناوب با دوره تناوب N باشد و همچنین فرض کنید $x[n]$ در یک دوره تناوب به صورت زیر باشد

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & M \leq n \leq M + N - 1 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (۴-۴۳)$$

که در آن M یک عدد دلخواه است.

قبلاً نشان دادیم که

$$Na_k = X(k \frac{2\pi}{N}) \quad (۴-۴۴)$$

که در آن a_k ضرایب سری فوریه $\tilde{x}[n]$ و $X(\Omega)$ تبدیل فوریه $x[n]$ می باشد. بنابراین Na_k معادل است با نمونه های تبدیل فوریه در یک دوره تناوب. نکته دیگری که باید به آن توجه کرد این است که

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

اگرچه شکل $x[n]$ و $X(\Omega)$ به انتخاب M وابسته است ولی مقادیر $X(\Omega)$ در فرکانسهای نمونه برداری $\frac{2\pi k}{N}$ به مقدار M بستگی ندارد.

مثال (۴-۸): فرض کنیم دنباله تناوبی به صورت زیر تعریف گردد.

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$$

این دنباله در شکل (۴-۱۳-a) رسم شده است. مطلوبست محاسبه ضرایب سری فوریه دنباله فوق. حل:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

اگر فاصله مجموع را $0 \leq n \leq N-1$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت.

$$a_k = \frac{1}{N}$$

اکنون اگر $x_1[n]$ را به صورت رابطه (۴-۴۳) با $M = 0$ تعریف کنیم، داریم.

$$x_1[n] = \delta[n]$$

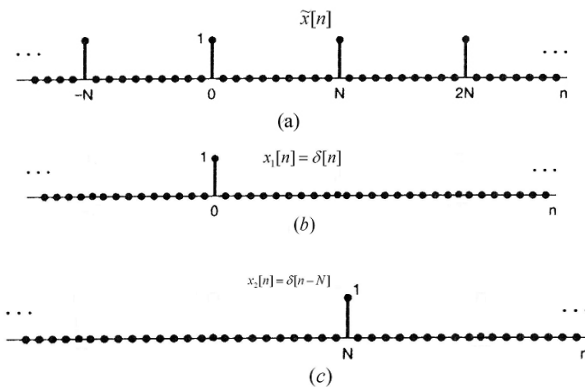
که در شکل (۴-۱۳-b) رسم شده است.

تبدیل فوریه این دنباله به سادگی از تعریف تبدیل فوریه قابل محاسبه است.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] e^{-j\Omega n} = 1$$

در اینجا می بینیم که رابطه $a_k = \frac{1}{N}$ برقرار است. چون در اینجا $(X(\Omega))_{\Omega=k \frac{2\pi}{N}}$ مساوی واحد

و مستقل از مقدار k است.



شکل (۴-۱۳): (a) قطار ضربه تناوبی گسسته زمانی (b, c) دو دنباله غیرتناوبی که هر کدام مساوی $\tilde{x}[n]$ در یک دوره تناوب دنباله هستند.

اکنون اگر $0 < M < N$ اختیار کنیم و سیگنال $x_2[n]$ را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$x_2[n] = \delta[n - N] \quad (۴۵-۴)$$

که تبدیل فوریه آن نیز متفاوت خواهد بود.

$$X(\Omega) = e^{-j\Omega N} \quad (۴۶-۴)$$

ولی به هر حال در فرکانسهای نمونه برداری $k \frac{2\pi}{N}$ مقدار $e^{-j\Omega N}$ نیز مساوی واحد است. در اینصورت

نیز رابطه (۴۴-۴) در فرکانسهای $k \frac{2\pi}{N}$ برقرار است.

۲-۴-۴ تبدیل فوریه برای دنباله های متناوب

اکنون می خواهیم تبدیل فوریه دنباله های متناوب را بیابیم. برای شروع، ابتدا دنباله زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \quad (۴۷-۴)$$

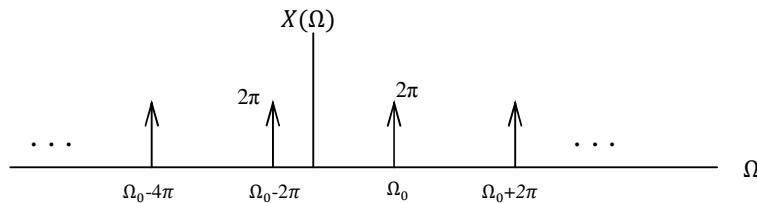
در حالت پیوسته زمان، دیدیم که تبدیل فوریه $e^{j\omega_0 t}$ یک ضربه در $\omega = \omega_0$ می باشد. بنابراین انتظار داریم که در حالت گسسته زمان نیز چنین شود. اما تبدیل فوریه در حالت گسسته زمان با دوره تناوب 2π متناوب است، چون

$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j(\Omega_0 + 2\pi r)n} \quad (۴۸-۴)$$

توجه شود که این تابع برحسب Ω متناوب است، حتی اگر بر حسب n متناوب نباشد. بنابراین تبدیل فوریه (۴۸-۴) را باید به صورت (۴۹-۴) نوشت.

$$X(\Omega) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) \quad (۴۹-۴)$$

که در شکل (۱۴-۴) نشان داده شده است.



شکل (۱۴-۴): تبدیل فوریه $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$

جهت اطمینان از صحت رابطه می خواهیم تبدیل فوریه معکوس رابطه (۴۹-۴) را بیابیم.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (۵۰-۴)$$

توجه کنید که فاصله طیفی به طول 2π دقیقاً شامل یک ضربه است. بنابراین اگر ضربه را فقط در Ω_0 در نظر بگیریم، نتیجه (۵۰-۴) به صورت زیر خواهد بود.

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \quad (۵۱-۴)$$

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

در حالت کلی تر اگر $x[n]$ شامل مجموعی از نمایی های مختلط باشد.

$$x[n] = b_1 e^{j\Omega_1 n} + \dots + b_M e^{j\Omega_M n} \quad (52-4)$$

طبق (49-4) تبدیل فوریه (52-4) برابر است با (53-4)

$$X(\Omega) = b_1 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_1 - 2\pi l) + b_2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_2 - 2\pi l) + \dots + b_M \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \Omega_M - 2\pi l) \quad (53-4)$$

این رابطه به ما می گوید $X(\Omega)$ یک قطار ضربه متناوب است که ضربه های آن در فرکانس های $\Omega_1, \dots, \Omega_M$ و در فاصله مضارب صحیحی از 2π قرار دارند. بنابراین هر فاصله 2π دقیقاً یک ضربه از هر یک از مجموعه های طرف راست در (53-4) را دارا خواهد بود.

توجه کنید که معادله (49-4) تبدیل فوریه دنباله مشخص شده توسط رابطه (47-4) است، چه این دنباله متناوب و چه غیرمتناوب باشد، یعنی چه Ω_0 را بتوان به صورت کسر گویایی از 2π نوشت و چه نتوان. به طور مشابه دنباله رابطه (52-4) فقط هنگامی تناوبی است که تمام Ω_0 های آن را به صورت کسر گویایی از 2π بتوان نوشت.

اکنون فرض کنید $x[n]$ تناوبی با دوره تناوب N باشد، در این صورت می توان $x[n]$ را به صورت سری فوریه نوشت.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (54-4)$$

اگر رابطه فوق را به صورت جمله به جمله بنویسیم، داریم.

$$x[n] = a_0 + a_1 e^{j(\frac{2\pi}{N})n} + a_2 e^{j2(\frac{2\pi}{N})n} + \dots + a_{N-1} e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}n} \quad (55-4)$$

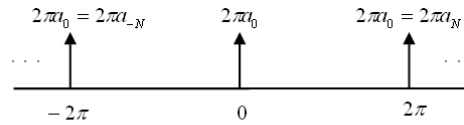
در مقایسه با (52-4) می توان تناظر زیر را میان Ω_i ها و فرکانسهای موجود در (54-4) ایجاد کرد.

$$\Omega_1 = 0, \Omega_2 = \frac{2\pi}{N}, \Omega_3 = 2(\frac{2\pi}{N}), \dots, \Omega_N = (N-1)\frac{2\pi}{N} \quad (56-4)$$

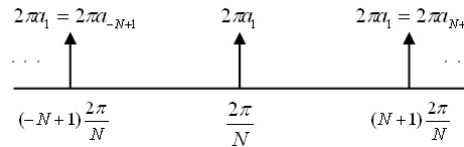
بنابراین از معادله (53-4) داریم.

$$X(\Omega) = a_0 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - 2\pi l) + a_1 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \frac{2\pi}{N} - 2\pi l) + \dots + a_N \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - (N-1)\frac{2\pi}{N} - 2\pi l) \quad (57-4)$$

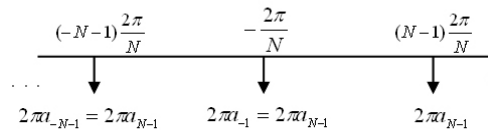
که در شکل (15-4) نمایش داده شده است.



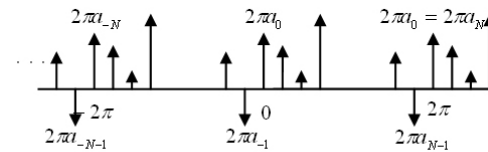
(a)



(b)



(c)



(d)

شکل (۴-۱۵): تبدیل فوریه سیگنال تناوبی گسسته زمان

در شکل (۴-۱۵-۱) اولین مجموع در سمت راست معادله (۴-۷۱) را رسم کرده ایم و از خاصیت تناوبی استفاده کردیم و نوشتیم.

$$a_0 = a_N = a_{-N} \quad (۴-۵۸)$$

در شکل (۴-۱۵-۱) اولین مجموع و در شکل (۴-۱۵-۲) آخرین مجموع را رسم کرده ایم. شکل (۴-۱۵-۳) مجموع کلی را برای $X(\Omega)$ نمایش می دهد.

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - k \frac{2\pi}{N} - 2\pi l) \quad (۴-۵۹)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\Omega - \frac{k - lN}{N} 2\pi)$$

در اینجا فقط با تغییر k می توان تمام جملات مجموع را ساخت یعنی می توان نوشت.

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (4-60)$$

بنابراین (4-60) تبدیل فوریه دنباله متناوب $x[n]$ با ضرایب سری فوریه a_k می باشد. بدین ترتیب هر دو نوع دنباله های متناوب و غیرمتناوب در یک قالب قابل بیان توسط تبدیل فوریه می شوند. همه این مراحل مرهون تعریف تابع جادویی ضربه می باشند.

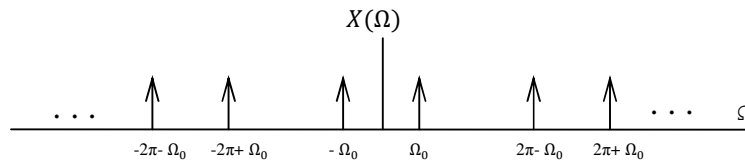
مثال (4-9): مطلوبست تبدیل فوریه دنباله متناوب زیر

$$x[n] = \cos \Omega_0 n = \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 n}$$

حل: از معادله (4-53) بلافاصله داریم.

$$X(\Omega) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi \{ \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) + \delta(\Omega - \Omega_0 + 2\pi l) \}$$

که در شکل (4-16) رسم شده است.



شکل (4-16): تبدیل فوریه گسسته زمانی $x[n] = \cos \Omega_0 n$

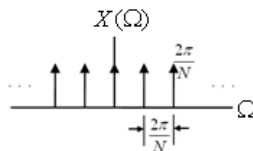
مثال (4-10): مطلوبست تبدیل فوریه دنباله زیر

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$$

حل: چون سیگنال تناوبی با دوره تناوب N است.

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

که در شکل (4-17) رسم شده است. در اینجا مشاهده می شود که هر چه فاصله بین ضربه ها در زمان بیشتر می شود (دوره تناوب بیشتر می شود)، فاصله ضربه ها در حوزه فرکانس کمتر می گردد (فرکانس اصلی کمتر می شود) و این نتیجه ای آشنا می باشد که در حوزه پیوسته زمان نیز کم و بیش در مورد آن بحث شد. در واقع شدت تغییرات سیگنال (دنباله) در حوزه زمان بیانگر وجود مؤلفه های فرکانس بالا در حوزه فرکانس سیگنال (دنباله) می باشد. بنابراین برای یک دنباله تناوب با دوره تناوب کوچک می توان انتظار مؤلفه های فرکانس بالا در حوزه فرکانس را داشت و برعکس اگر دوره تناوب بزرگ باشد، می توان انتظار داشت که مؤلفه های فرکانس بالا کمتر شوند. در اینجا دوباره لازم به ذکر است که به علت متناوب بودن حوزه فرکانس برای دنباله های گسسته زمان، تعریف فرکانسهای پایین شامل ضرایب زوج π می باشد کما اینکه فرکانسهای بالا شامل ضرایب فرد از π است.



شکل (۴-۱۷): تبدیل فوریه قطار ضربه گسسته زمان

۴-۵ خواص تبدیل فوریه گسسته زمان

در این قسمت به بررسی چند خاصیت مهم از خواص تبدیل فوریه گسسته زمان می پردازیم. همانگونه که قبلاً اشاره شد برخی از این خواص بسیار مشابه خاصیت متناظر در مورد سیگنال های پیوسته زمان هستند. در برخی موارد میزان این شباهت به حدی است که می توان با توجه به خاصیت پیوسته زمان متناظر، مستقیماً خاصیت گسسته زمان را استخراج کرد.

اما در همه موارد وضع بدین صورت نیست و گاهی برخی خواص تبدیل فوریه گسسته زمان دارای تفاوت های اساسی با نوع پیوسته زمان هستند. اصولاً دلیل اصلی این تفاوت ها در تناوبی بودن تبدیل فوریه گسسته زمان نهفته است.

اگر تبدیل فوریه گسسته زمان $x[n]$ را $X(\Omega)$ بنامیم. جهت نمایش این رابطه و برای سهولت از علامت های زیر استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= F\{x[n]\} \\ x[n] &= F^{-1}\{X(\Omega)\} \\ x[n] &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} X(\Omega) \end{aligned} \quad (۴-۶۱)$$

همه علائم فوق معادل یکدیگر بوده و یک مفهوم را می رسانند.

۴-۵-۱ تناوبی بودن تبدیل فوریه گسسته زمان

همانطور که قبلاً گفتیم تبدیل فوریه گسسته زمان یک تابع پیوسته و متناوب از Ω می باشد که دوره تناوب آن 2π است.

$$X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi r) \quad (۴-۶۲)$$

این خاصیت ارتباطی به نوع دنباله در حوزه زمان ندارد و یک خاصیت عمومی در حوزه فرکانس برای دنباله های گسسته زمان است.

۴-۵-۲ خطی بودن

اگر تبدیل فوریه دنباله گسسته زمان $x_i[n]$ را $X_i(\Omega)$ بنامیم، مثلاً اگر

$$x_1[n] \stackrel{F}{\Leftrightarrow} X_1(\Omega) \quad (۴-۶۳)$$

$$x_2[n] \stackrel{F}{\Leftrightarrow} X_2(\Omega) \quad (۴-۶۴)$$

در آن صورت

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

$$a_1x_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{F} a_1X_1(\Omega) + bX_2(\Omega) \quad (۴-۶۵)$$

همانگونه که در مورد خاصیت متناظر در حوزه پیوسته زمان بیان کردیم، خاصیت خطی بودن شامل دو خاصیت جمع آثار و همگن بودن است. خاصیت همگن بودن به صورت زیر قابل بیان است. اگر

$$X_i(\Omega) = F\{x_i[n]\} \quad (۴-۶۶)$$

در آن صورت تبدیل فوریه $ax_i[n]$ برابر است با

$$aX_i(\Omega) = F\{ax_i[n]\} \quad (۴-۶۷)$$

و همچنین خاصیت جمع آثار بیان می دارد که

$$F\{\sum x_i[n]\} = \sum F\{x_i[n]\} = \sum X_i(\Omega) \quad (۴-۶۸)$$

بنابراین در حالت کلی

$$\begin{aligned} F\{\sum a_i x_i[n]\} &= \sum F\{a_i x_i[n]\} = \sum a_i F\{x_i[n]\} \\ &= \sum a_i X_i(\Omega) \end{aligned} \quad (۴-۶۹)$$

عدم مشخص کردن حد مجموع به مفهوم دلخواه بودن آن است.

۴-۵-۳ تقارن

با توجه به رابطه تبدیل فوریه گسسته زمان به سادگی میتوان ثابت کرد که اگر $x[n]$ حقیقی باشد.

$$X(\Omega) = X^*(-\Omega) \quad (۴-۷۰)$$

اثبات: طبق تعریف تبدیل فوریه داریم.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \quad (۴-۷۱)$$

بنابراین

$$X^*(-\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]e^{-j\Omega n} \quad (۴-۷۲)$$

که اگر $x[n]$ حقیقی باشد رابطه فوق مساوی $X(\Omega)$ خواهد بود.

اگر تبدیل فوریه را طبق رابطه اولر بر حسب توابع سینوس و کسینوس بنویسیم، داریم.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cos\Omega n - j \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\sin\Omega n$$

بنابراین رابطه دامنه و زاویه بصورت زیر بدست می آیند.

$$|X(\Omega)| = \sqrt{\left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cos\Omega n \right\}^2 + \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\sin\Omega n \right\}^2} \quad (۴-۷۳)$$

$$X(\Omega) = -\tan^{-1} \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\sin\Omega n}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cos\Omega n} \quad (۴-۷۴)$$

از اینجا نتیجه می گیریم که قسمت حقیقی و دامنه $X(\Omega)$ تابعی زوج از Ω و قسمت موهومی و همچنین زاویه آن تابع فردی از Ω می باشد. بنابراین تبدیل فوریه قسمت های زوج و فرد $x[n]$ به ترتیب مساوی قسمت های حقیقی و موهومی $X(\Omega)$ خواهند بود.

$$\mathcal{E}\{x[n]\} \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \Re\{X(\Omega)\} \quad (۷۵-۴)$$

$$\mathcal{O}\{x[n]\} \stackrel{F}{\Leftrightarrow} -j\Im\{X(\Omega)\} \quad (۷۶-۴)$$

اثبات: از بسط $x[n]$ به قسمت های زوج و فرد و از بسط $X(\Omega)$ به قسمت های حقیقی و موهومی داریم.

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\mathcal{E}\{x[n]\} + \mathcal{O}\{x[n]\}]e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}\{x[n]\}\cos\Omega n - j \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{O}\{x[n]\}\sin\Omega n \\ &\quad - j \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}\{x[n]\}\sin\Omega n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{O}\{x[n]\}\cos\Omega n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}\{x[n]\}\cos\Omega n - j \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{O}\{x[n]\}\sin\Omega n \\ &= \Re\{X[\Omega]\} + j\Im\{X(\Omega)\} \end{aligned} \quad (۷۷-۴)$$

بنابراین روابط زیر را خواهیم داشت که مؤید ادعای ما می باشند.

$$\Re\{X[\Omega]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}\{x[n]\}\cos\Omega n \quad (۷۸-۴)$$

$$\Im\{X[\Omega]\} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{O}\{x[n]\}\sin\Omega n \quad (۷۹-۴)$$

۴-۵-۴ انتقال در حوزه زمان و فرکانس

با توجه به رابطه تبدیل فوریه گسسته زمان می توان به سادگی تبدیل فویه دنباله انتقال داده شده در حوزه زمان را بدست آورد.

$$x[n-n_0] \stackrel{F}{\Leftrightarrow} e^{-j\Omega n_0} X(\Omega) \quad (۸۰-۴)$$

همچنین می توان تبدیل را به صورت انتقالی از $X(\Omega)$ بدست آورد.

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \stackrel{F}{\Leftrightarrow} X(\Omega - \Omega_0) \quad (۸۱-۴)$$

تمرین (۱-۴): روابط (۸۰-۴) و (۸۱-۴) را ثابت کنید.

۴-۵-۵ تفاضل و مجموع

فصل چهارم: تبدیل فوری گسسته زمان

در حقیقت معادل انتگرال گیری در حوزه گسسته زمان، مجموع می باشد. متناظر با آن، معادل مشتق گیری در حوزه گسسته زمان، تفاضل می باشد. فرض کنید دنباله $x[n]$ دارای تبدیل فوری $X(\Omega)$ باشد، در آن صورت با استفاده از خواص خطی بودن تبدیل فوری و انتقال در حوزه زمان، می توان تبدیل فوری تفاضل (به عنوان معادل گسسته زمان مشتق گیری) $x[n] - x[n-1]$ را به صورت زیر ارائه کرد.

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{F} (1 - e^{-j\Omega}) X(\Omega) \quad (۸۲-۴)$$

اما مجموع زیر را در نظر بگیرید

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] \quad (۸۳-۴)$$

چون

$$y[n] - y[n-1] = x[n] \quad (۸۴-۴)$$

شاید تصور کنیم که تبدیل فوری $y[n]$ باید تبدیل فوری $x[n]$ تقسیم بر $(1 - e^{-j\Omega})$ بشود. اما این فقط قسمتی از جواب است و جواب کلی باید شامل مولفه DC سیگنال هم بشود. پس

$$\sum_{m=-\infty}^n x[m] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega) + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) \quad (۸۵-۴)$$

که جمله دوم یک مؤلفه DC در سیگنال می باشد.

تمرین (۲-۴): سعی کنید با ایجاد تناظر میان حالت پیوسته زمان و گسسته زمان رابطه (۸۵-۴) را استخراج کنید.

مثال (۱۲-۴): مطلوبست تبدیل فوری دنباله $u[n]$.

حل: با توجه به (۸۵-۴) می توان تبدیل فوری $u[n]$ را به عنوان مجموع $\delta[n]$ بدست آورد، چون

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

و چون تبدیل فوری $\delta[n]$ برابر واحد است، داریم.

$$F\{u[n]\} = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k2\pi)$$

۴-۵-۶ مقیاس بندی در حوزه زمان و فرکانس

به خاطر ماهیت گسسته مقادیر متغیر مستقل، در مورد دنباله های گسسته زمان خاصیت مقیاس بندی باید به گونه ای دیگر برای این نوع دنباله ها تعریف شود. ابتدا فرض کنید $y[n] = x[-n]$ باشد، در اینصورت داریم.

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n] e^{-j\Omega n} \quad (۸۶-۴)$$

با تغییر متغیر $m = -n$ داریم.

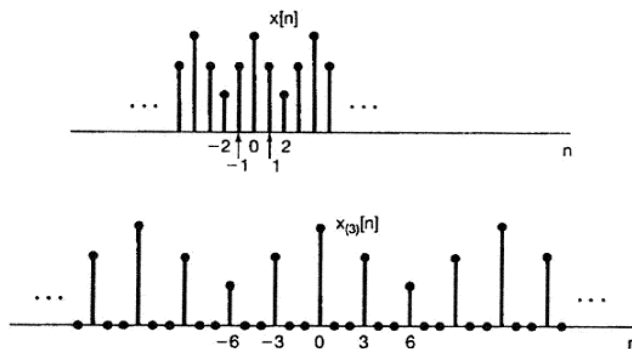
$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{j\Omega n} = X(-\Omega) \quad (۸۷-۴)$$

اگر چه رابطه فوق مشابه رابطه متناظر پیوسته زمان آن است، اما تفاوت های اصلی هنگامی ظاهر می شوند که بخواهیم مقیاس بندی دنباله های گسسته زمان را تعریف کنیم. همانگونه که قبلاً نشان دادیم در مورد دنباله های گسسته زمان نتیجه عملیات مقیاس بندی لزوماً مشابه دنباله اصلی نیست و گاهی بسیار متفاوت است. بنابراین نباید انتظار داشت که در حالت کلی میان تبدیل فوریه یک دنباله و تبدیل فوریه دنباله مقیاس بندی شده، یک رابطه مشخص وجود داشته باشد. در حالت پیوسته در حقیقت $x(at)$ اگر $a < 1$ باشد یک نمونه سیگنال مشابه $x(t)$ است که فقط تغییرات آن روی محور زمان آهسته تر شده (در حوزه زمان سیگنال بازتر شده) است. همین سیگنال اگر $a > 1$ باشد، هنوز مشابه سیگنال $x(t)$ است و فقط تغییرات آن روی محور زمان سریعتر شده (در حوزه زمان سیگنال بسته تر شده) است.

اما ارتباط $x[n]$ و $x[an]$ به این سادگی نیست. به عبارت دیگر $x[an]$ نمی تواند در حالت کلی بیانگر یک دنباله با تغییراتی مشابه $x[n]$ باشد. بنابراین نمی توانیم تغییرات حوزه زمانی دنباله $x[n]$ را با انتخاب $a < 1$ آهسته تر کنیم. و یا اینکه اگر $a > 1$ را عدد صحیح بگیریم (مثلاً $a = 2$) در واقع دنباله را در حوزه زمان بازتر نکرده ایم، چون n فقط اعداد صحیح را اختیار میکند. بنابراین دنباله $x[2n]$ فقط شامل نمونه های زوج $x[n]$ خواهد بود. برای اینکه رفتار دنباله مقیاس بندی شده شبیه رفتار دنباله اصلی باشد، دنباله $x_k[n]$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{k}] & \text{اگر } n \text{ مضربی از } k \text{ باشد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ مضربی از } k \text{ نباشد} \end{cases} \quad (۸۸-۴)$$

به عنوان مثال در شکل (۱۹-۴) $x[n]$ و $x_{(3)}[n]$ نمایش داده شده است



شکل (۱۸-۴): دنباله $x_{(3)}[n]$ که از $x[n]$ با قرار دادن دو صفر بین مقادیر متوالی دنباله اصلی بدست آمده است.

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

$x_{(k)}[n]$ از $x[n]$ با قرار دادن $k-1$ صفر بین مقادیر مختلف دنباله اصلی بدست می آید. بنابراین می توان $x_{(k)}[n]$ را شکل آهسته تر $x[n]$ فرض کرد. در این صورت می توان رابطه ای میان تبدیل فوریه این دو دنباله بدست آورد. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} X_{(k)}(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[kr] e^{-j\Omega kr} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[r] e^{-j(k\Omega)r} = X(k\Omega) \end{aligned} \quad (۸۹-۴)$$

بنابراین تبدیل فوریه $x_{(k)}[n]$ برابر است با

$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{F} X(k\Omega) \quad (۹۰-۴)$$

این نتیجه با توجه به خاصیت دوگانی حوزه های زمان و فرکانس کاملاً قابل توجیه است. به عبارت دیگر چون $x_{(k)}[n]$ در حقیقت شکل بازتر $x[n]$ است، انتظار داریم که تبدیل فوریه آن شکل فشرده تر تبدیل فوریه دنباله اصلی باشد.

۷-۵-۴ مشتق گیری در حوزه فرکانس

با مشتق گیری از رابطه تبدیل فوریه گسسته زمان داریم.

$$\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jnx[n] e^{-j\Omega n} \quad (۹۱-۴)$$

بنابراین $\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$ تبدیل فوریه $-jnx[n]$ می باشد یا

$$-jnx[n] \xleftrightarrow{F} \frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \quad (۹۲-۴)$$

۸-۵-۴ قضیه پارسوال

همانگونه که قبلاً بیان گردید، رابطه پارسوال بیانگر تساوی انرژی موجود در حوزه زمان و فرکانس برای یک دنباله می باشد.

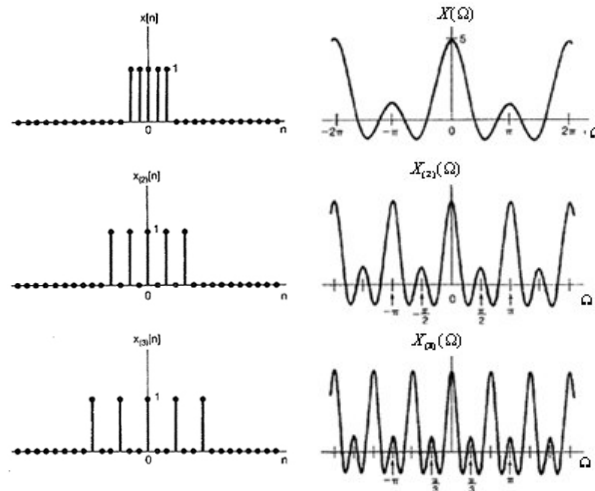
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega \quad (۹۳-۴)$$

اثبات: با توجه به اینکه $|x[n]|^2 = x[n]x^*[n]$ و با توجه به رابطه تبدیل معکوس فوریه در حوزه گسسته زمان، می توان نوشت.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} x[n] \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\Omega) e^{-j\Omega n} d\Omega \quad (۹۴-۴)$$

با تغییر ترتیب انتگرال و مجموع داریم.

فصل چهارم: تبدیل فوریۀ گسسته زمان



شکل (۴-۱۹): ارتباط بین حوزه های زمان و فرکانس؛ با افزایش k ، $x_{(k)}[n]$ بازتر می شود ولی تبدیل فوریۀ آن فشرده تر می شود.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\Omega) d\Omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (۴-۹۵)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

به $|X(\Omega)|^2$ طیف چگالی انرژی نیز گفته می شود. انرژی در دنباله متناوب بینهایت است و رابطه پارسوال به شکل (۴-۹۵) در مورد این دنباله ها مفید نخواهد بود. برای دنباله های متناوب قضیه پارسوال به صورت زیر بیان می شود.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2 = \sum_{k=-N}^{+N} |a_k|^2 \quad (۴-۹۶)$$

تمرین (۴-۳): رابطه فوق را با توجه به تعریف توان در مورد دنباله های متناوب ثابت کنید.

۴-۵-۹ خاصیت کانولوشن

قبلاً راجع به خاصیت مهم تبدیل فوریۀ در تبدیل عمل کانولوشن به عمل ضرب صحبت کرده ایم. اگر ورودی سیستمی باشد که پاسخ ضربه آن $h[n]$ است، در این صورت خروجی از رابطه کانولوشن بدست می آید که جهت یاد آوری، دوباره تکرار می شود.

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (۴-۹۷)$$

در آن صورت می توان ارتباط بین تبدیل فوریۀ دنباله های ورودی، خروجی و پاسخ ضربه را به صورت زیر نوشت.

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) \quad (۴-۹۸)$$

$H(\Omega)$ را پاسخ حوزه فرکانس یا تابع انتقال سیستم گسسته می گویند. رابطه (۹۸-۴) قبلاً در مورد سیگنال های پیوسته زمان ثابت شده است و اکنون این رابطه را برای حالت گسسته زمان ثابت می کنیم.

اثبات: همانطور که می دانیم جمع کانولوشن به صورت زیر بیان می شود.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k] \quad (۹۹-۴)$$

اگر طرفین رابطه (۹۹-۴) را در $e^{-j\Omega n}$ ضرب کرده و روی n از $-\infty$ تا $+\infty$ جمع بزنیم، داریم.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-k]x[k]e^{-j\Omega n} \quad (۱۰۰-۴)$$

از تغییر مرتبه مجموع می توان طرف دوم رابطه (۱۰۰-۴) را به صورت (۱۰۱-۴) نوشت

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-k]e^{-j\Omega n} \quad (۱۰۱-۴)$$

با تغییر متغیر $n-k=m$ رابطه (۱۰۱-۴) به رابطه (۱۰۲-۴) تبدیل می شود.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]e^{-j\Omega(m+k)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]e^{-j\Omega k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]e^{-j\Omega m} \end{aligned} \quad (۱۰۲-۴)$$

بنابراین رابطه (۹۸-۴) حاصل می شود و اثبات کامل می گردد.

مثال (۱۳-۴): یک سیستم LTI با پاسخ ضربه ای به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$h[n] = \delta[n - n_0]$$

مطلوبست تعیین رابطه ورودی و خروجی سیستم مذکور.

حل: پاسخ فرکانسی سیستم مذکور به صورت زیر است.

$$H(\Omega) = e^{-j\Omega n_0}$$

بنابراین برای هر ورودی $x[n]$ با تبدیل فوریه $X(\Omega)$ ، تبدیل فوریه خروجی برابر است با

$$Y(\Omega) = e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

بنابراین می توان رابطه ورودی و خروجی سیستم را به این صورت نوشت.

$$y[n] = x[n - n_0]$$

مثال (۱۴-۴): فرض کنید پاسخ ضربه یک سیستم به صورت زیر باشد.

$$h[n] = \alpha^n u[n]$$

اگر ورودی این سیستم به صورت زیر در نظر گرفته شود، مطلوبست تعیین خروجی سیستم.

$$x[n] = \beta^n u[n]$$

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

حل: طی مراحل زیر می توان پاسخ را در حوزه زمان و فرکانس بدست آورد. ابتدا تابع انتقال فرکانسی سیستم محاسبه می گردد و سپس تبدیل فوریه ورودی بدست می آید.

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}$$

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - \beta e^{-j\Omega}}$$

در نهایت حاصل ضرب تابع انتقال در تبدیل فوریه ورودی محاسبه می شود.

$$Y(\Omega) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\Omega})(1 - \beta e^{-j\Omega})}$$

اگر $\alpha \neq \beta$ باشد، می توان $Y(\Omega)$ را به صورت زیر نوشت.

$$Y(\Omega) = \frac{A}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} + \frac{B}{1 - \beta e^{-j\Omega}}$$

که در آن

$$A = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}, \quad B = -\frac{\beta}{\alpha - \beta}$$

بنابراین $y[n]$ برابر است با

$$\begin{aligned} y[n] &= A\alpha^n u[n] + B\beta^n u[n] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^{n+1} u[n] - \beta^{n+1} u[n]] \end{aligned}$$

اما اگر $\alpha = \beta$ باشد.

$$Y(\Omega) = \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \right)^2$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت.

$$Y(\Omega) = \frac{e^{j\Omega}}{-j\alpha} \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \right)$$

بنابراین داریم.

$$y[n] = \frac{j}{\alpha} [-j(n+1)\alpha^{n+1} u[n+1]]$$

و یا

$$y[n] = (n+1)\alpha^n u[n+1]$$

از آنجائیکه فاکتور $n+1$ برای $n = -1$ مساوی صفر است، می توان نوشت.

$$y[n] = (n+1)\alpha^n u[n]$$

همانطوریکه قبلاً گفتیم عملکرد $h[n]$ در سیستم های گسسته همانند عملکرد $h(t)$ در سیستم های پیوسته زمان است. بنابراین باید بتوان کلیه خواص سیستم از قبیل پایداری، علیت، حافظه دار بودن را از

روی این پاسخ بدست آورد. به عنوان مثال، یک سیستم گسسته، پایدار است وقتی که پاسخ ضربه آن در رابطه زیر صدق کند.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \quad (۱۰۳-۴)$$

به عنوان مثال سیستمی با پاسخ ضربه $h[n] = z^n$ هرگز پایدار نخواهد بود. در نتیجه برای چنین سیستمی تبدیل فوریه $h[n]$ واگرا خواهد بود. بنابراین در حالت کلی شرط لازم برای وجود یا همگرایی تبدیل فوریه هر دنباله گسسته زمان $x[n]$ این است که در رابطه (۱۰۳-۴) صدق کند.

۴-۵-۱۰ کانولوشن تناوبی^۵

خاصیت کانولوشن آنگونه که قبلاً مطرح شد، قابل اعمال برای دو دنباله متناوب نیست. چون در آن حالت جمع کانولوشن همگرا نخواهد شد. اما در اینجا کانولوشن تناوبی برای دو دنباله $\tilde{x}_1[n]$ ، $\tilde{x}_2[n]$ که هر دو با دوره تناوب مشترک N متناوب هستند را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\tilde{y}[n] = \tilde{x}_1[n] \otimes \tilde{x}_2[n] = \sum_{m=\langle N \rangle} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m] \quad (۱۰۴-۴)$$

کاربرد معادله فوق را در شکل (۴-۲۱) نمایش داده شده است. سیگنال های $\tilde{x}_1[m]$ ، $\tilde{x}_2[n-m]$ همانند کانولوشن معمولی در یکدیگر ضرب می شوند. توجه کنید که چون دو دنباله روی محور n با دوره تناوب N تناوبی هستند بنابراین حاصل ضرب آن دو نیز روی محور n با دوره تناوب N متناوب است. همچنین توجه کنید که مجموع در یک دوره تناوب محاسبه می شود. برای محاسبه $\tilde{y}[n]$ برای مقادیر متوالی $n, \tilde{x}_2[n-m]$ انتقال داده می شود با فرض اینکه m محور زمان است و با خارج شدن تدریجی یک دوره تناوب از فاصله مجموع، دوره تناوب دیگر وارد فاصله مشخص شده، می شود. بنابراین با افزایش n به اندازه N واحد، $\tilde{x}_2[n-m]$ به اندازه یک دوره تناوب کامل انتقال داده می شود و از اینجا می توان گفت که $\tilde{y}[n+N] = \tilde{y}[n]$ یا به عبارت دیگر $\tilde{y}[n]$ نیز با دوره تناوب N متناوب است. نتایج حاصل بستگی به انتخاب محل حدود مجموع ندارد و فقط باید حد مجموع یک دوره تناوب را شامل شود. برای کانولوشن تناوبی، خاصیت کانولوشن که قبلاً مطرح شد را می توان بر حسب ضرایب سری فوریه مستقیماً بیان کرد، که در آن a_k, b_k, c_k به ترتیب ضرایب سری های فوریه، $\tilde{x}_2[n]$ ، $\tilde{y}[n]$ می باشند.

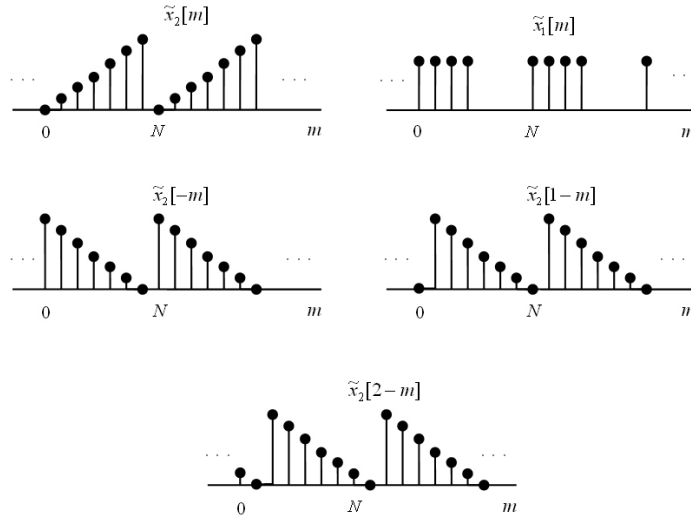
$$c_k = Na_k b_k \quad (۱۰۵-۴)$$

اثبات: اگر $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$ به ترتیب دارای ضرایب سری فوریه a_k و b_k باشند، داریم (دوره تناوب هر دنباله N است).

$$\tilde{y}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \tilde{x}_1[k] \tilde{x}_2[n-k] \quad (۱۰۶-۴)$$

⁵ Periodic Convolution

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان



شکل (۴-۲۰) مراحل شکل گیری کانولوشن تناوبی در دنباله تناوبی

$$\tilde{x}_1[n] = \sum_{m=\langle N \rangle} a_m e^{jm(\frac{2k}{N})n} \quad (۴-۱۰۷)$$

$$\tilde{x}_2[n] = \sum_{r=\langle N \rangle} b_r e^{jr(\frac{2k}{N})n}$$

حدود مجموع را به صورت زیر انتخاب می کنیم.

$$\begin{aligned} 0 < r < N-1 \\ 0 < m < N-1 \end{aligned} \quad (۴-۱۰۸)$$

با قرار دادن (۴-۱۰۷) و (۴-۱۰۸) در (۴-۱۰۶) داریم.

$$\begin{aligned} \tilde{y}[n] &= \sum_{k=\langle N \rangle} \sum_{m=0}^{N-1} a_m e^{j(\frac{2\pi}{N})mk} \sum_{r=0}^{N-1} b_r e^{jr(\frac{2\pi}{N})(n-k)} \\ &= \sum_{k=\langle N \rangle} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} a_m b_r e^{jr(\frac{2\pi}{N})n} e^{jk(\frac{2\pi}{N})(m-r)} \end{aligned} \quad (۴-۱۰۹)$$

با تغییر ترتیب مجموع داریم.

$$\tilde{y}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} a_m b_r e^{jr\frac{2\pi}{N}n} \sum_{k=\langle N \rangle} e^{jk\frac{2\pi}{N}(m-r)} \quad (۴-۱۱۰)$$

می بینیم مجموع آخر یعنی مجموعی که روی k عمل می کند، همواره مساوی صفر است مگر به ازاء $m=r$ در این حالت مقدار آن مساوی N می گردد که این مطلب تاکنون بارها مشاهده شده است. بنابراین می توان مجموع روی m و r را به یک مجموع تبدیل کرد و نوشت.

$$\tilde{y}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} a_m b_m e^{jm\frac{2\pi}{N}n} N \quad (۴-۱۱۱)$$

اما سری فوریه $\tilde{y}[n]$ به صورت زیر است.

$$\tilde{y}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} c_m e^{jm\frac{2\pi}{N}n} \quad (۱۱۲-۴)$$

از مقایسه (۱۱۱-۴) با (۱۱۲-۴) رابطه (۱۱۳-۴) را نتیجه می گیریم.

$$c_k = Na_k b_k \quad (۱۱۳-۴)$$

۴-۵-۱۱ تبدیل فوریه گسسته DFT^۶

همانگونه که گفتیم از مزیت های عمده روش های گسسته زمان بر پیوسته زمان وجود روش های مناسب و سریع در تجزیه و تحلیل دنباله ها و سیستم های گسسته زمان می باشد. با توجه به کاربرد روزافزون رایانه در علوم مهندسی می توان با سرعت و دقت مطلوب هرگونه عملیات دلخواهی را روی دنباله ها و سیستم های گسسته زمان از قبیل کانولوشن و غیره را انجام داد. در میان روش های مختلف تحلیل، روشی مناسب جهت استفاده در رایانه های دیجیتال بنام DFT وجود دارد که تحقق آن به روش سخت افزاری و یا نرم افزاری نیز بسیار ساده است. DFT نوعی تبدیل فوریه برای دنباله های دوره محدود به شمار می رود که در حقیقت نمونه های تبدیل فوریه گسسته زمان یا DTFT در فرکانس های $k\frac{2\pi}{N}$ می باشد و در جای خود نحوه انتخاب N به تفصیل مورد بررسی قرار می گیرد.

تعریف DFT

فرض کنید $x[n]$ دنباله ای با دوره محدود باشد، بنابراین یک عدد N_1 را می توان به قسمی یافت که

$$x[n] = 0 \quad n > N_1 - 1 \text{ و } n < 0 \quad (۱۱۴-۴)$$

اکنون می توان دنباله تناوبی $\tilde{x}[n]$ را به قسمی تعریف کرد که در یک دوره تناوب مساوی $x[n]$ باشد.

اگر $N \geq N_1$ باشد و $\tilde{x}[n]$ با دوره تناوب N متناوب باشد، داریم.

$$\tilde{x}[n] = x[n] \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (۱۱۵-۴)$$

ضرایب سری فوریه برای $\tilde{x}[n]$ با رابطه زیر داده می شوند.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \end{aligned} \quad (۱۱۶-۴)$$

N جمله اول از مجموع ضرایب که بوسیله (۱۱۶-۴) نمایش داده می شوند، را DFT مربوط به $x[n]$

می نامند که آن را با $\tilde{X}[k]$ نمایش می دهند.

$$\tilde{X}[k] = a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (۱۱۷-۴)$$

^۶ Discrete Fourier Transform

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

اهمیت عملی DFT در این است که از روی آن می توان دنباله اصلی دوره محدود را بازسازی کرد. از معادله (۴-۲۲) که برای دنباله متناوب $\tilde{x}[n]$ نوشتیم، می توان $\tilde{x}[n]$ را از روی a_k بدست آورد. بنابراین از معادلات (۴-۱۱۵) و (۴-۱۱۷) می توان رابطه (۴-۱۱۸) را بدست آورد

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad n=0,1,\dots,N-1 \quad (4-118)$$

رابطه (۴-۱۱۸) را رابطه معکوس DFT یا (IDFT) می نامند. بنابراین یک دنباله دوره محدود را می توان به عنوان مجموعه ای محدود از مقادیر غیر صفر و یا به عنوان مجموعه ای محدود از $\tilde{X}[k]$ در DFT تصور کرد، به عبارت دیگر این تناظر یک به یک است.

اهمیت دوم DFT این است که الگوریتم های سریعی چون FFT برای محاسبه آن وجود دارد. می توان نشان داد که $\tilde{X}[k]$ در واقع با یک نمونه برداری در حوزه فرکانس از $X(\Omega)$ بدست می آید، که در فرکانسهای متوالی $\frac{2\pi k}{N}$ برداشته می شوند. یعنی

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \quad \text{در یک دوره تناوب } 2\pi \quad (4-119)$$

برای این کار به جای Ω در رابطه تبدیل فوریه مقدار $k \frac{2\pi}{N}$ را قرار می دهیم.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (4-120)$$

$$X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad (4-121)$$

با مقایسه این رابطه با رابطه زیر می توان به نتیجه مورد نظر رسید.

$$\tilde{X}(k) = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad (4-122)$$

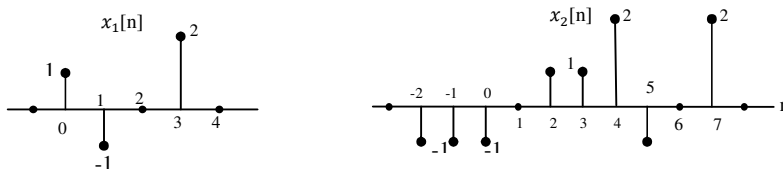
اما چون $x[n]$ فقط در دوره $0 \leq n \leq N_1$ که $N_1 < N$ است، مقدار غیر صفر دارد می توان رابطه (۴-۱۲۲) را به صورت (۴-۱۲۳) نوشت.

$$\tilde{X}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (4-123)$$

که این همان رابطه (۴-۱۱۹) است.

باید دقت کرد که دوره تناوب نمونه برداری در حوزه فرکانس بگونه ای باشد که $N > N_1$ شود. در غیر این صورت در بازسازی $x[n]$ از $X(\frac{2\pi k}{N})$ یا $\tilde{X}(k)$ دچار اشتباه خواهیم شد.

برای روشن شدن مطلب دو دنباله $x_2[n], x_1[n]$ را در نظر بگیرید.



شکل (۴-۲۱): نمایش دنباله های $x_1[n]$, $x_2[n]$ در حوزه زمان

تبدیل فوریه $X_1(\Omega)$ و $X_2(\Omega)$ به سادگی قابل محاسبه می باشند.

$$\begin{aligned} X_1(\Omega) &= 1 - e^{-j\Omega} + 2e^{-j3\Omega} \\ X_2(\Omega) &= -e^{j2\Omega} - e^{j\Omega} - 1 + e^{-j2\Omega} + e^{-j3\Omega} \\ &\quad + 2e^{-j4\Omega} - e^{-j5\Omega} + 2e^{-j7\Omega} \end{aligned} \quad (4-124)$$

اگر دوره تناوب نمونه برداری را $N = 4$ در نظر بگیریم به ازاء جمیع مقادیر k رابطه زیر را داریم.

$$X_1\left(\frac{2\pi}{4}k\right) = X_2\left(\frac{2\pi}{4}k\right) \quad (4-125)$$

چون

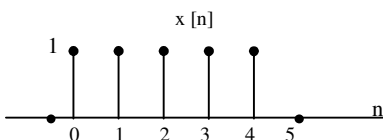
$$X_1\left(\frac{2\pi}{4}k\right) = 1 - e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 2e^{-j\frac{3\pi k}{2}} \quad (4-126)$$

$$X_2\left(\frac{2\pi}{4}k\right) = -e^{jk\pi} - e^{j\frac{\pi k}{2}} - 1 + e^{-jk\pi} + e^{-j\frac{3\pi k}{2}} \quad (4-127)$$

$$+ 2e^{-j2k\pi} - e^{-j\frac{5\pi k}{2}} + 2e^{-j\frac{7\pi k}{2}} = 1 - e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 2e^{-j\frac{3\pi k}{2}}$$

بنابراین نمونه های بدست آمده از طیف هر دو دنباله یکسان هستند. بنابراین اگر چه از این نمونه ها می توان دوباره $x_1[n]$ را بازسازی کرد چون دوره تناوب آن ۴ است، ولی نمی توان $x_2[n]$ را بازسازی کرد چون دوره تناوب آن ۱۰ است. بنابراین اگر بخواهیم نمونه های برداشته شده از $X_2(\Omega)$ به طور یکتا $x_2[n]$ را بازسازی کند. لازم است حداقل $N \geq 10$ شود.

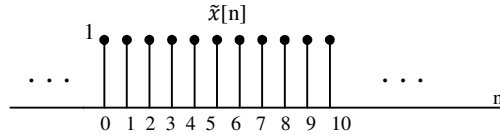
مثال (۴-۱۵): ضرایب DFT مربوط به دنباله $x[n]$ که در شکل (۴-۲۳) نمایش داده شده است را بیابید.



شکل (۴-۲۲) دنباله مربعی $x[n]$

حل: اگر دنباله متناوب $\tilde{x}[n]$ را از روی $x[n]$ با دوره تناوب $N = 5$ بسازیم دنباله شکل (۴-۲۴) حاصل می شود. در این صورت ضرایب سری فوریه دنباله متناوب $\tilde{x}[n]$ به صورت (۴-۱۲۵) بدست می آیند.

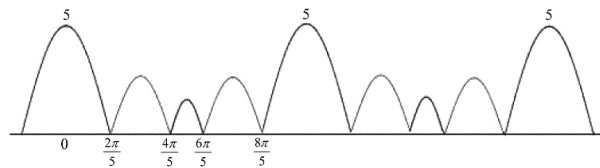
فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان



شکل (۴-۲۳): دنباله متناوب که از روی $x[n]$ با دوره تناوب $N = 5$ ساخته شده است.

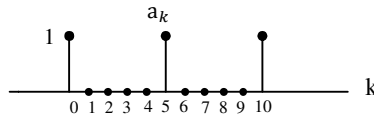
$$a_k = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^4 e^{-jk(\frac{2\pi}{5})n} = \begin{cases} 1 & k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۴-۱۲۸)$$

و البته می توان این ضرایب را به صورت نمونه های $F(x[n]) = X(\Omega)$ در فرکانس های $\Omega = k \frac{2\pi}{5}$ به ازاء $k = 1, 2, 3, \dots$ بدست آورد. قبلا دیدیم که قدر مطلق تبدیل فوریه گسسته زمانی $x[n]$ به صورت زیر است.



شکل (۴-۲۴): طیف دامنه $|X(\Omega)|$

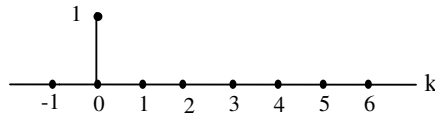
می توان به سادگی a_k را بدست آورد.



شکل (۴-۲۵): ضرایب سری فوریه $\tilde{x}[n]$

و ضرایب DFT مساوی ضرایب a_k در یک دوره متناوب می باشند.

$X(k)$

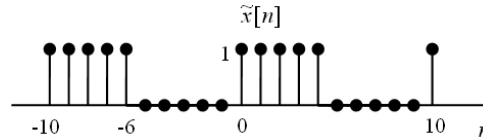


شکل (۴-۲۶): ضرایب DFT مربوط به $x[n]$

بنابراین

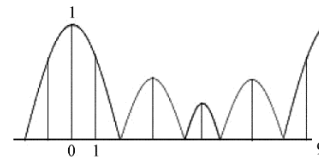
$$X[k] = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

اکنون فرض کنید $\tilde{x}[n]$ را از روی $x[n]$ با دوره تناوب $N = 10$ بسازیم.

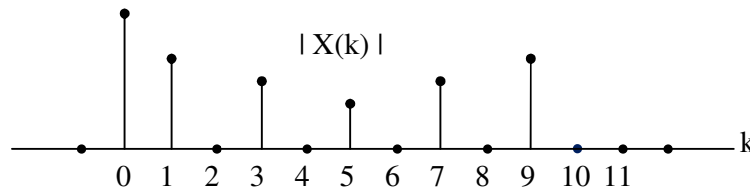


شکل (۴-۲۷): دنباله متناوب $\tilde{x}[n]$ که از روی $x[n]$ با دوره تناوب $N = 10$ ساخته شده است.

طیف $X(\Omega)$ مثل حالت اول است چون از روی $x[n]$ بدست می آید، اما اکنون باید از طیف $X(\Omega)$ در فرکانس های $\Omega = k \frac{2\pi}{10}$ نمونه برداری کنیم.



شکل (۴-۲۸): ضرایب سری فوریه مربوط به $\tilde{x}[n]$ بر حسب k



شکل (۴-۲۹): ضرایب DFT مربوط به $x[n]$

محدوده تغییرات دامنه $X(k)$ در شکل فوق نمایش داده شده است، که برابر یک دوره تناوب از a_k است.

محاسبه کانولوشن معمولی به کمک DFT

مهمترین کاربرد معادله (۴-۱۰۵) این است که به کمک این معادله DFT می توان محاسبات مربوط به کانولوشن معمولی دو دنباله دوره محدود را ساده کرد. به عنوان مثال فرض کنید.

$$x_1[n] = 0 \quad 0 \leq n \leq N_1 - 1 \quad \text{در خارج ناحیه} \quad (۴-۱۲۹)$$

$$x_2[n] = 0 \quad 0 \leq n \leq N_2 - 1 \quad \text{در خارج ناحیه} \quad (۴-۱۳۰)$$

همچنین فرض کنید $y[n]$ نمایانگر کانولوشن معمولی دو دنباله فوق باشد، بنابراین در خارج ناحیه

$$0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 2 \quad (۴-۱۳۱)$$

$y[n]$ برابر صفر است.

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = 0 \quad (۴-۱۳۲)$$

اکنون دوره تناوب N را به گونه ای انتخاب می کنیم که

$$N \geq N_1 + N_2 - 1 \quad (۴-۱۳۳)$$

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

باشد و دنباله های $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$ را با دوره تناوب N از روی سیگنالهای متناظر $x_1[n]$ و $x_2[n]$ می سازیم.

$$\tilde{x}_1[n] = x_1[n] \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (134-4)$$

$$\tilde{x}_2[n] = x_2[n] \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (135-4)$$

اگر $y[n]$ نمایانگر کانولوشن متناوب $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$ باشد، داریم.

$$\tilde{y}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m] \quad (136-4)$$

در آن صورت در یک دوره تناوب حاصل کانولوشن تناوبی و معمولی یکسان است.

$$\tilde{y}[n] = y[n] \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (137-4)$$

توضیح معادله فوق در شکل (۴-۳۰) بوضوح دیده می شود. در این شکل فرض شده است که $N_1 = 5$ و $N_2 = 7$. بنا براین با انتخاب $N = 12$ سیگنالهای متناوب $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$ ایجاد شده اند و حاصل کانولوشن تناوبی آنها در یک دوره تناوب گرفته شده است. دیده می شود که این حاصل با حاصل کانولوشن معمولی در یک دوره تناوب برابر است.

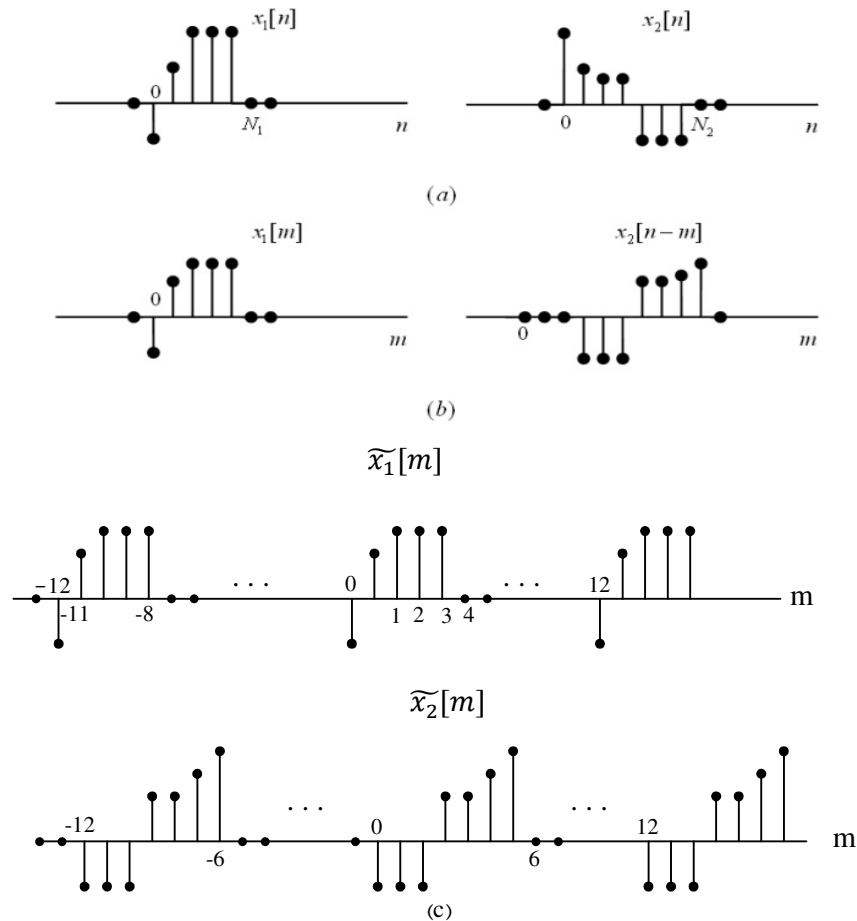
بنابراین ابتدا باید به $x_1[n]$ و $x_2[n]$ به اندازه کافی صفر اضافه کرد تا دوره تناوب سیگنال متناوب متناظر N شود (به گونه ای که $N \geq N_1 + N_2 - 1$ است). پاسخ کانولوشن معمولی $y[n]$ در خارج ناحیه $0 \leq n \leq N-1$ صفر است، بنابراین $y[n]$ که از کانولوشن معمولی (غیرتناوبی) $x_1[n]$ و $x_2[n]$ بدست می آید را می توان از کانولوشن تناوبی $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$ بدست آورد. البته به شرط اینکه نتیجه را فقط در یک دوره تناوب N در نظر بگیریم. از طرفی می دانیم که سری فوریه $\tilde{y}_2[n]$ را می توان از روی سری های فوریه $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$ بدست آورد و چون $\tilde{y}[n]$ و $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$ متناظر با $y[n]$ و $x_1[n]$ و $x_2[n]$ در فاصله $0 \leq n \leq N-1$ می باشند، بنابراین از معادله (۴-۱۱۷) می بینیم که ضرایب سری های فوریه برای سیگنال های متناوب مساوی DFT های سه سیگنال غیرمتناوب می باشند.

بنابراین الگوریتم زیر را می توان برای پیدا کردن کانولوشن غیرمتناوب $x_1[n]$ و $x_2[n]$ ارائه کرد.

۱- ابتدا DFT، N نقطه ای مربوط به $x_1[n]$ و $x_2[n]$ ($X_1(k)$ و $X_2(k)$) را محاسبه می کنیم.

۲- دو DFT را در هم ضرب می کنیم تا DFT مربوط به $y[n]$ بدست آید.

$$Y(k) = X_1(k)X_2(k) \quad (138-4)$$



شکل (۴-۳): محاسبه کانولوشن معمولی دو دنباله با دوره‌های محدود (a) دنباله اصلی (b) کانولوشن معمولی $x_1[n]$ و

$x_2[n]$ (c) کانولوشن تناوبی $\tilde{x}_1[n]$ و $\tilde{x}_2[n]$

۳-IDFT را حساب کرده و $y[n]$ را بدست می‌آوریم (معادله (۴-۱۱)) تنها محدودیت عملیات فوق این است که باید حتماً DFT، N نقطه‌ای را حساب کرد به گونه‌ای که $N \geq N_1 + N_2 - 1$ باشد. با توجه به وجود الگوریتم FFT برای محاسبه سریع DFT مجموع سه عملیات گفته شده روش بسیار ساده و سریعی را جهت محاسبه کانولوشن غیرتناوبی دو دنباله دوره محدود، ارائه میکند.

۴-۵-۱۲ خاصیت مدولاسیون

فرض کنید $y[n] = x_1[n]x_2[n]$ در این صورت طبق خاصیت مدولاسیون تبدیل فوری حاصل ضرب دنباله‌ها در حوزه زمان به کانولوشن تبدیل‌های فوری در حوزه فرکانس تبدیل می‌شوند.

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

$$x_1[n]x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X_1(\theta)X_2(\Omega - \theta)d\theta \quad (۱۳۹-۴)$$

اثبات: رابطه تبدیل فوریه به صورت زیر نوشته می شود.

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]x_2[n]e^{-j\Omega n} \quad (۱۴۰-۴)$$

از طرفی می توان به جای $x_1[n]$ مقدارش را نوشت.

$$x_1[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta)e^{j\theta n}d\theta \quad (۱۴۱-۴)$$

با جایگذاری در (۱۴۰-۴) داریم

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n] \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{2\pi} X_1(\theta)e^{j\theta n}d\theta \right\} e^{-j\Omega n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]X_1(\theta)e^{j\theta n}d\theta e^{-j\Omega n} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta)d\theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]e^{-jn(-\theta+\Omega)} \end{aligned}$$

و بالاخره

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta)X_2(\Omega - \theta)d\theta \quad (۱۴۲-۴)$$

مثال (۱۶-۴): مطلوبست تبدیل فوریه دنباله $(-1)^n$.

$$x_1[n] = e^{j\pi n} = (-1)^n$$

حل: چون دنباله $x_1[n]$ متناوب است، داریم.

$$X_1(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\Omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

توجه می شود که برای $x_1[n]$ دوره تناوب $N = 2$ می باشد.

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} = \frac{1}{2} [1 - e^{-j\frac{2\pi}{2}k}] = \frac{1}{2} [1 - e^{-jk\pi}]$$

بنابراین ضرایب سری فوریه به صورت زیر بدست می آیند.

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

و با استفاده از تعریف تبدیل فوریه برای دنباله های متناوب می توان تبدیل فوریه دنباله $x_1[n]$ را بدست آورد.

$$X_1(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\Omega - k\pi)$$

که مجموع فوق فقط به ازاء k های فرد مقدار دارد، پس می توان رابطه فوق را به صورت زیر نیز نوشت.

$$X_1(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - (2k+1)\pi)$$

در شکل (۳۱-۴) مراحل کانولوشن $X_1(\Omega)$ و یک تبدیل فوریه دلخواه $X_2(\Omega)$ نشان داده شده است.

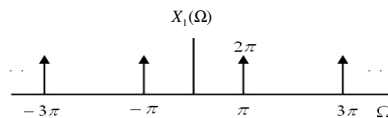
اگر $X_2(\Omega)$ را همانند شکل (b-۳۱-۴) را در نظر بگیریم، در آن صورت با انتخاب ناحیه انتگرال گیری بین 0 و 2π داریم.

$$\int_0^{2\pi} X_1(\theta) X_2(\Omega - \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} X_2(\Omega - \theta) \delta(\theta - \pi) d\theta = X_2(\Omega - \pi) \quad (۱۴۳-۴)$$

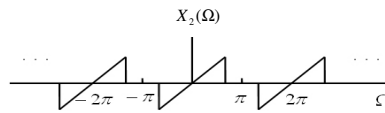
که طیف حاصل از حاصل ضرب $x_1[n]$ و $x_2[n]$ در شکل (d-۳۱-۴) رسم شده است. البته این نتیجه را از خاصیت انتقال به حوزه فرکانس نیز می توانستیم بدست آوریم. چون $e^{jm} = (-1)^n$ و طبق خواص تبدیل فوری، ضرب یک دنباله مفروض در یک دنباله نمایی موجب انتقال طیف دنباله مفروض خواهد شد.

$$e^{jm} x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_2(\Omega - \pi) \quad (۱۴۴-۴)$$

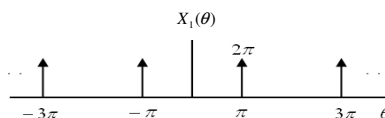
در اینجا می بینیم که ضرب یک دنباله در $(-1)^n$ باعث می شود که فرکانسهای بالا و پایین در طیف دنباله جابه جا شوند که این خاصیت بسیار مهمی است.



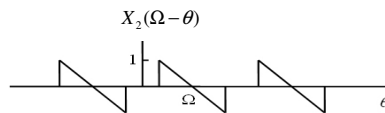
(a)



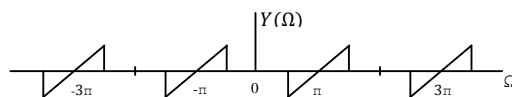
(b)



(c)



(d)



شکل (۳۱-۴): مراحل مختلف مدولاسیون گسسته زمان یک سیگنال دلخواه $x_2[n]$ با $x_1[n] = (-1)^n$

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

۴-۵-۱۳ خواص دوگانی

در اینجا به بررسی چند نوع دوگانی جدید و جالب می پردازیم.

ضرایب سری فوریه متناوب

در حالت پیوسته زمان، خاصیت تقارن یا دوگانی بین دو معادله مستقیم و معکوس تبدیل فوریه دیده می شد ولی در حالت تبدیل فوریه گسسته زمان چنین خاصیتی وجود ندارد، اما یک نوع تقارن در سری فوریه گسسته زمان دیده می شود. برای روشن شدن مطلب دو دنباله متناوب با دوره تناوب N را در نظر بگیرید که بوسیله رابطه زیر به هم مربوط می شوند.

$$f[m] = \frac{1}{N} \sum_{r \in \langle N \rangle} g[r] e^{-jr(\frac{2\pi}{N})m} \quad (۴-۱۴۵)$$

اگر $r=n, m=k$ در نظر بگیریم، داریم.

$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} g[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (۴-۱۴۶)$$

بنابراین $f[k]$ متناظر با ضرایب سری فوریه دنباله $y[n]$ خواهد بود.

$$g[n] \overset{F}{\leftrightarrow} f[k] \quad (۴-۱۴۷)$$

توجه شود که در نمایش فوق عملگر F مبین ارتباط سری فوریه بین دو دنباله می باشد.

اگر $r=-k, m=n$ در نظر بگیریم، داریم.

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k \in \langle N \rangle} y[-k] e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} = \sum_{k \in \langle N \rangle} \frac{1}{N} g[-k] e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (۴-۱۴۸)$$

و در نتیجه $\frac{1}{N} g[-k]$ متناظر با ضرایب سری فوریه دنباله $f[n]$ خواهد بود.

$$f[n] \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{N} g[-k] \quad (۴-۱۴۹)$$

در واقع عملیات فوق بیانگر این حقیقت است که ضرایب سری فوریه دنباله متناوب، a_k ، متناسب با دنباله اصلی $x[n]$ است که در زمان معکوس شده باشد ($x[n]$ دنباله ای است که a_k ضرایب سری فوریه آن است). این دوگانی در تمام خواص سری فوریه مشاهده می شود. دانشجویان به عنوان مثال می توانند موارد زیر را تحقیق کنند.

$$\begin{cases} e^{jm(\frac{2\pi}{N})n} x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} a_{k-m} \\ x[n-n_0] \overset{F}{\leftrightarrow} a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n_0} \end{cases} \quad (۴-۱۵۰)$$

$$\begin{cases} \sum_{r \in \langle N \rangle} x[r] y[n-r] \overset{F}{\leftrightarrow} N a_k b_k \\ x[n] y[n] \overset{F}{\leftrightarrow} \sum_{l \in \langle N \rangle} a_l b_{k-l} \end{cases} \quad (۴-۱۵۱)$$

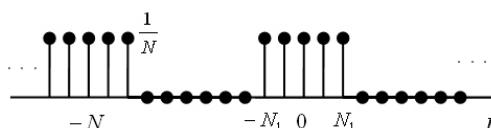
تمرین (۴-۴): صحت روابط فوق را تأیید کنید.

هر دستگاه نمایانگر یک جفت دوگانی است. کاربرد خاصیت دوگانی در مثال زیر نشان داده شده است. مثال (۴-۱۷): دنباله متناوب زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n] = \frac{1}{N} \frac{\sin\left[\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{2\pi n}{2N}\right)}$$

ضرایب سری فوریه این دنباله را با استفاده از خاصیت دوگانی بدست آورید.

حل: دیدیم که اگر $x[k] \xleftrightarrow{F} g[n]$ ، در آن صورت $x[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{N} g[-k]$. بنابراین ضرایب سری فوریه $x[n]$ همان دنباله مربعی است که دامنه اش در $\frac{1}{N}$ ضرب شده و در زمان نیز معکوس شده است (به شکل (۴-۳۲) توجه کنید).



شکل (۴-۳۲): ضرایب سری فوریه دنباله $x[n]$ که در مثال (۴-۱۷) ذکر شده است.

تبدیل فوریه گسسته زمان و سری فوریه پیوسته زمان

نوعی دوگانی بین تبدیل فوریه گسسته زمان و ضرایب سری فوریه پیوسته زمان وجود دارد که از مقایسه معادلات مربوطه بوضوح مشاهده می شود. جهت مقایسه بهتر فرمول ها را دوباره تکرار می کنیم.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (۴-۱۵۲)$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (۴-۱۵۳)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (۴-۱۵۴)$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (۴-۱۵۵)$$

فرض کنید که $f(u)$ نمایانگر یک تابع متناوب پیوسته زمان باشد که دوره تناوب آن 2π است و همچنین فرض کنید $g[m]$ یک دنباله گسسته باشد که با $f(u)$ به صورت زیر مربوط باشد.

$$f(u) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g[m] e^{-jum} \quad (۴-۱۵۶)$$

با قرار دادن $u = \Omega$ و $m = n$ می بینیم که $f(\Omega)$ تبدیل فوریه $g[n]$ است، همچنین می توان $g[m]$ را از $f(u)$ بازسازی کرد.

$$g[n] \leftrightarrow f(\Omega) \quad (۴-۱۵۷)$$

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

$$g[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} f(u) e^{jum} du \quad (۱۵۸-۴)$$

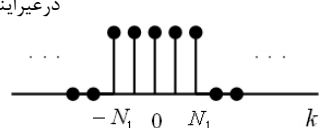
اگر در رابطه (۱۵۵-۴) $m = -k, u = t$ قرار دهیم، رابطه زیر را بدست خواهیم آورد.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[-k] e^{jkt} \quad (۱۵۹-۴)$$

بنابراین $g[-k]$ ضرایب سری فوریه $f(t)$ می باشند.

$$f(t) \xleftrightarrow{F} g[-k] \quad (۱۶۰-۴)$$

که سری فوریه فوق مربوط به حالت پیوسته زمان باشد. معنی عبارات فوق این است که اگر فرض کنیم $x[n]$ یک دنباله گسسته زمان با تبدیل فوریه $X(\Omega)$ باشد، از آنجائیکه $X(\Omega)$ متناوب و تابعی پیوسته از Ω است، می توان ضرایب سری فوریه آن را بدست آورد به طوریکه $\omega_0 = 1$ و به جای t از متغیر Ω به عنوان متغیر پیوسته استفاده خواهیم کرد. از خاصیت دوگانی درمی یابیم که ضرایب سری فوریه $X(\Omega)$ همان دنباله اصلی $x[n]$ هستند که در زمان معکوس شده باشد. مثال (۱۸-۴): سیگنال پیوسته زمان $x(t)$ که با دوره تناوب 2π متناوب است را در نظر بگیرید. فرض کنید $x(t)$ دارای ضرایب سری فوریه به صورت زیر باشد.

$$a_k = \begin{cases} 1 & |k| \leq N_1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$


شکل (۳۳-۴): نمایش ضرایب سری فوریه سیگنال پیوسته زمانی $x(t)$

مطلوبست پیدا کردن سیگنال $x(t)$.

حل: اگر از خاصیت دوگانی استفاده شود، می توان به سادگی $x(t)$ را بدست آورد.

$$x(t) = \frac{\sin(N_1 + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}$$

به طریق مشابه تبدیل فوریه گسسته زمان $X(\Omega)$ که در یک دوره تناوب $-\pi < \Omega < \pi$ تعریف شده است را در نظر می گیریم.

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq w \\ 0 & w < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \quad (۱۶۱-۴)$$

می توان $X(\Omega)$ را به عنوان یک سیگنال مربعی متناوب با سری فوریه زیر در نظر گرفت.

$$x[n] = \frac{\sin wn}{\pi n} = \frac{w}{\pi} \text{Sinc} \left(\frac{wn}{\pi} \right) \quad (۱۶۲-۴)$$

چون برای چنین سیگنالی $T_1 = w$ ، $\omega_0 = 1$ می باشد (به فصل ۳ مراجعه شود).

در جدول (۴-۱) خواص دوگانی در حوزه پیوسته و گسسته زمان نمایش داده شده‌اند.

	پیوسته زمان		گسسته زمان	
	حوزه زمان	حوزه فرکانس	حوزه زمان	حوزه فرکانس
سری فوری	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ پیوسته زمان متناوب در زمان	$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ فرکانس گذشته غیرمتناوب در فرکانس	$x[n] = \sum_{n=\langle N \rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$ گسسته زمان متناوب در زمان	$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$ گسسته در فرکانس متناوب در فرکانس
تبدیل فوری	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$ پیوسته زمان غیرمتناوب	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ پیوسته در فرکانس غیرمتناوب در فرکانس	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$ گسسته زمان غیرمتناوب در زمان	$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$ پیوسته در فرکانس متناوب در فرکانس

جدول (۴-۱)

۴-۶ نمایش تبدیل فوری گسسته زمانی DTFT به صورت قطبی

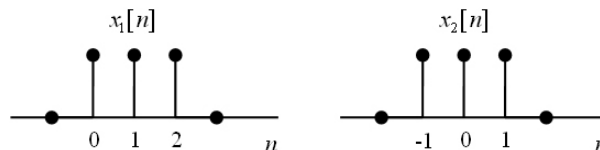
فرض کنید $x[n]$ یک دنباله گسسته زمانی با تبدیل فوری $X(\Omega)$ باشد، همانطور که می‌دانیم $X(\Omega)$ یک تابع مختلط می‌باشد، بنابراین می‌توان آن را به صورت قطبی نمایش داد.

$$X(\Omega) = |X(\Omega)| e^{j\angle X(\Omega)} \quad (۴-۱۶۳)$$

چون $X(\Omega)$ با دوره تناوب 2π متناوب است، لازم است دامنه و زاویه $X(\Omega)$ نیز با دوره تناوب 2π متناوب باشند. $|X(\Omega)|$ شامل اطلاعات مربوط به دامنه نمایی‌های مختلطی است که در $x[n]$ وجود دارند و $\angle X(\Omega)$ نیز زاویه نمایی‌ها را معین می‌کند. بنابراین دانستن هر دو عامل قدر مطلق و زاویه برای تعیین یکتای $X(\Omega)$ لازم و کافی است. به هر حال می‌توان چندین دنباله متفاوت را یافت که دارای دامنه تبدیل فوری یکسان باشند.

برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید.

مثال (۴-۱۹): تبدیل فوری گسسته زمان DTFT مربوط به دو دنباله زیر را بیابید.



فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

شکل (۴-۳۴): دو دنباله متفاوت که دارای قدر مطلق تبدیل فوریه یکسان هستند

حل: ابتدا برای $x_1[n]$ داریم

$$X_1(\Omega) = \sum_{n=0}^2 e^{-j\Omega n} = 1 + e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega}$$

و برای $x_1[n]$ نیز داریم.

$$X_2(\Omega) = \sum_{n=-1}^1 e^{-j\Omega n} = e^{j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega}$$

اگر از رابطه اول عبارت $e^{-j\Omega}$ را فاکتور بگیریم، رابطه دوم بدست می آید، یعنی

$$X_1(\Omega) = e^{-j\Omega} [X_2(\Omega)]$$

بنابراین دامنه هر دو تبدیل فوریه یکسان است.

$$|X_1(\Omega)| = |X_2(\Omega)|$$

نمایش DTFT به صورت قطبی بسیار مفید است. مثلاً در مورد سیستم های LTI که در آنها رابطه

بین خروجی، ورودی و تابع شبکه به صورت زیر است.

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) \quad (۴-۱۶۴)$$

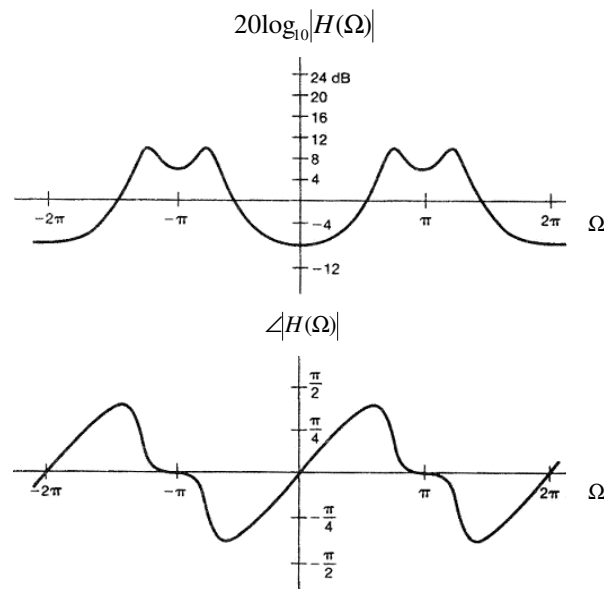
می توان ارتباط بین دامنه ها و زاویه ها را به صورت زیر نوشت.

$$|Y(\Omega)| = |H(\Omega)||X(\Omega)| \quad (۴-۱۶۵)$$

$$\angle Y(\Omega) = \angle H(\Omega) + \angle X(\Omega) \quad (۴-۱۶۶)$$

لازم است توجه شود که دامنه $X(\Omega)$ تابعی زوج و متناوب از Ω است و زاویه $X(\Omega)$ تابعی فرد و متناوب از Ω می باشد. این مطلب با توجه به نمایش تبدیل فوریه به صورت قطبی کاملاً آشکار می شود (به روابط (۴-۷۱) الی (۴-۷۴) مراجعه کنید). پس $|X(\Omega)|$ یک تابع زوج و متناوب از Ω است، چون از مجموع دو تابع زوج و متناوب با دوره تناوب یکسان تشکیل شده است و همچنین $\angle X(\Omega)$ یک تابع فرد و متناوب از Ω است، چون از حاصل تقسیم دو تابع زوج و فرد که هر دو با یک دوره تناوب یکسان متناوب هستند، تشکیل شده است. به عنوان مثالی از $|X(\Omega)|$ و $\angle X(\Omega)$ به شکل (۴-۳۵) توجه کنید.

به دلیل زوج بودن دامنه تبدیل فوریه، دانستن آن فقط در هر فاصله به طول π کافی است. همچنین با فرد بودن زاویه تبدیل فوریه، دانستن آن در هر فاصله به طول π جهت مشخص کردن $X(\Omega)$ به طور یکتا کافی می باشد.



شکل (۴-۳۵): نمای قدر مطلق و زاویه تبدیل فوری.

۷-۴ تابع انتقال سیستم‌هایی که بوسیله معادله تفاضلی با ضرایب ثابت توصیف می گردند

۱-۷-۴ محاسبه پاسخ ضربه و تابع انتقال

همانگونه که در فصل دوم توضیح داده شد سیستم‌های LTI گسسته زمان را می توان به وسیله یک معادله تفاضلی با ضرایب ثابت و با فرض شرایط استراحت اولیه توصیف نمود. در حالت کلی یک معادله تفاضلی از مرتبه M به صورت زیر نوشته می شود.

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (۴-۱۶۷)$$

در اولین قدم جهت محاسبه پاسخ ضربه لازم است فرض کنیم که تبدیل فوری $x[n]$ و $y[n]$ وجود دارند و همگرا هستند. در این صورت می توان از طرفین رابطه (۴-۱۶۷) تبدیل فوری گرفت و رابطه (۴-۱۶۸) و سپس (۴-۱۶۹) را بدست آورد.

$$\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega} Y(\Omega) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega} X(\Omega) \quad (۴-۱۶۸)$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega}} \quad (۴-۱۶۹)$$

بنابراین با داشتن معادله تفاضلی به راحتی می توان تابع انتقال سیستم را بدست آورد.

مثال (۴-۲۱): پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI که توسط معادله تفاضلی زیر توصیف می گردد را با فرض شرایط استراحت اولیه بدست آورید.

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

$$y[n] - \alpha y[n-1] = x[n] \quad (۱۷۰-۴)$$

حل: اگر فرض کنیم $|\alpha| < 1$ باشد با گرفتن تبدیل فوریه از دو طرف رابطه (۱۷۰-۴) به رابطه (۱۷۱-۴) می‌رسیم.

$$Y(\Omega) - \alpha e^{-j\Omega} Y(\Omega) = X(\Omega) \quad (۱۷۱-۴)$$

بنابراین تابع انتقال سیستم از رابطه زیر بدست می‌آید

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \quad (۱۷۲-۴)$$

رابطه (۱۷۲-۴) یک رابطه آشنا برای دانشجویان و در حقیقت تبدیل فوریه دنباله زیر می‌باشد.

$$h[n] = \alpha^n u[n] \quad (۱۷۳-۴)$$

مثال (۲۲-۴): با توجه به معادله تفاضلی زیر که مبین یک سیستم LTI و علی می‌باشد، مطلوبست تابع انتقال سیستم.

$$y[n] - y[n-1] + \frac{2}{9} y[n-2] = x[n] \quad (۱۷۴-۴)$$

حل: با فرض وجود تبدیل فوریه $x[n], y[n], h[n]$ از تبدیل فوریه (۱۷۴-۴) به رابطه (۱۷۵-۴) می‌رسیم.

$$Y(\Omega) - e^{-j\Omega} Y(\Omega) + \frac{2}{9} e^{-j2\Omega} Y(\Omega) = X(\Omega) \quad (۱۷۵-۴)$$

و یا

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega} + \frac{2}{9} e^{-j2\Omega}} \quad (۱۷۶-۴)$$

با تفکیک (۱۷۶-۴) به کسور جزئی داریم.

$$H(\Omega) = \frac{-1}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\Omega}} + \frac{2}{1 - \frac{2}{3} e^{-j\Omega}} \quad (۱۷۷-۴)$$

بنابراین به سادگی می‌توان $h[n]$ را بدست آورد.

$$h[n] = -\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n] \quad (۱۷۸-۴)$$

مثال (۲۲-۴): فرض کنید ورودی سیستم مذکور در رابطه (۱۷۷-۴) به صورت زیر باشد.

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

مطلوبست پاسخ سیستم.

حل: تبدیل فوریه ورودی برابر است با

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\Omega}}$$

بنابراین طبق خاصیت مدولاسیون می توان تبدیل فوریه خروجی را بدست آورد.

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega})(1 - \frac{2}{3}e^{-j\Omega})}$$

می توان رابطه فوق را به کسور جزئی بسط داد، در این صورت داریم:

$$Y(\Omega) = \frac{a}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}} + \frac{b}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} + \frac{c}{1 - \frac{2}{3}e^{-j\Omega}}$$

مقادیر a, b, c باید در روابط زیر صدق کنند.

$$a + b + c = 1$$

$$-\frac{11}{12}a - b - \frac{7}{12}c = 0$$

$$\frac{1}{6}a + \frac{2}{9}b + \frac{1}{12}c = 0$$

از حل معادلات فوق به روش کرامر می توان a, b, c را بدست آورد.

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 7/12 \\ 0 & 2/9 & 1/12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 11/12 & 1 & 7/12 \\ 1/6 & 2/9 & 1/12 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{\frac{108}{5}} = -4$$

و به همین ترتیب می توان مقادیر b, c را بدست آورد.

$$b = 1.8, c = 3.2$$

۴-۷-۲ نمایش سیستم LTI گسسته زمان به کمک بلوک های اساسی

هر سیستم LTI گسسته زمان که به صورت یک معادله تفاضلی با ضرایب ثابت داده شده است، را می توان به کمک بلوک های اساسی نمایش داد. در اینجا منظور ما از بلوک های اساسی بلوک تأخیر، ضرب کننده و جمع کننده می باشد. این نوع نمایش کاربرد فراوانی در شبیه سازی سیستم های گسسته زمان به کمک رایانه دارد.

دو نوع ساختار برای نمایش سیستم های LTI گسسته زمان به کمک بلوک های اساسی وجود دارد که این دو نوع ساختار کاملاً معادل می باشند (اگرچه از لحاظ ظاهر و تعداد بلوک های مورد استفاده متفاوت هستند). به عنوان مثال جهت سادگی فرض می کنیم در معادله تفاضلی (۴-۱۶۷)، $M = N$ باشد.

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

ساختار سری هنگامی بدست می آید که بتوان صورت و مخرج رابطه (۴-۱۶۹) را به صورت حاصل ضرب عوامل تجزیه کرد. در اینصورت می توان $H(\Omega)$ را به صورت زیر نوشت.

$$H(\Omega) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^N (1 + \mu_k e^{-j\Omega})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 + \eta_k e^{-j\Omega})} \quad (۴-۱۷۹)$$

توجه شود که در حالت کلی η_k, μ_k اعداد مختلطی هستند. آن تعداد از ریشه ها که مختلط هستند به صورت دو به دو مزدوج ظاهر می شوند، در نتیجه می توان با یکی کردن ریشه های مزدوج به فرم زیر به $H(\Omega)$ دست یافت.

$$H(\Omega) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^P (1 + \beta_{1k} e^{-j\Omega} + \beta_{2k} e^{-j2\Omega}) \prod_{k=1}^{N-2P} (1 + \mu_{1k} e^{-j\Omega})}{a_0 \prod_{k=1}^Q (1 + \alpha_{1k} e^{-j\Omega} + \alpha_{2k} e^{-j2\Omega}) \prod_{k=1}^{N-2Q} (1 + \eta_k e^{-j\Omega})} \quad (۴-۱۸۰)$$

در رابطه فوق P و Q تعداد جفت ریشه های مزدوج صورت و مخرج می باشند. بنابراین اکنون تمام ضرایب معادله (۴-۱۸۰) حقیقی هستند و می توان تابع $H(\Omega)$ را به صورت حاصلضرب توابع درجه یک و درجه دو نوشت و در نتیجه ساختاری که توسط معادله (۴-۱۸۰) پیشنهاد می شود یک ساختار سری از سیستم های مرتبه اول و دوم می باشد. جهت روشن تر شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید.

مثال (۴-۲۳): $H(\Omega)$ را توسط بلوک های اساسی بسازید.

$$H(\Omega) = \frac{b_0 (1 + \beta_{11} e^{-j\Omega} + \beta_{21} e^{-j2\Omega}) (1 + \mu_1 e^{-j\Omega})}{a_0 (1 + \alpha_{11} e^{-j\Omega} + \alpha_{21} e^{-j2\Omega}) (1 + \eta_1 e^{-j\Omega})}$$

حل: ابتدا $H(\Omega)$ را به دو جزء به صورت زیر تقسیم می کنیم.

$$H(\Omega) = H_1(\Omega) H_2(\Omega)$$

که در آن

$$H_1(\Omega) = \frac{b_0}{a_0} \frac{(1 + \beta_{11} e^{-j\Omega} + \beta_{21} e^{-j2\Omega})}{(1 + \alpha_{11} e^{-j\Omega} + \alpha_{21} e^{-j2\Omega})}$$

$$H_2(\Omega) = \frac{1 + \mu_1 e^{-j\Omega}}{1 + \eta_1 e^{-j\Omega}}$$

با نوشتن $H_1(\Omega)$ به صورت $\frac{Y_1(\Omega)}{X(\Omega)}$ داریم.

$$\frac{Y_1(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{b_0}{a_0} \frac{1 + \beta_{11} e^{-j\Omega} + \beta_{21} e^{-j2\Omega}}{1 + \alpha_{11} e^{-j\Omega} + \alpha_{21} e^{-j2\Omega}}$$

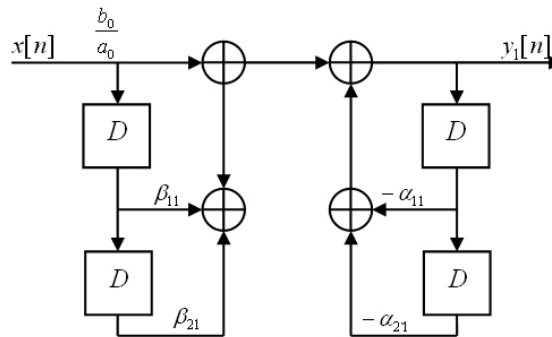
و در نتیجه

$$Y_1(\Omega) [1 + \alpha_{11} e^{-j\Omega} + \alpha_{21} e^{-j2\Omega}] = \frac{b_0}{a_0} X(\Omega) [1 + \beta_{11} e^{-j\Omega} + \beta_{21} e^{-j2\Omega}]$$

و در حوزه زمان می توان رابطه ورودی و خروجی را بدین صورت نوشت.

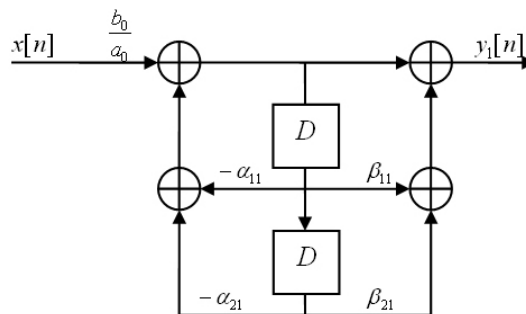
$$\begin{aligned}
 & y_1[n] + \alpha_{11}y_1[n-1] + \alpha_{21}y_1[n-2] \\
 &= \frac{b_0}{a_0} \{x[n] + \beta_{11}x[n-1] + \beta_{21}x[n-2]\} \\
 & y_1[n] = \frac{b_0}{a_0} \{x[n] + \beta_{11}x[n-1] + \beta_{21}x[n-2]\} - \alpha_{11}y_1[n-1] + \alpha_{21}y_1[n-2]
 \end{aligned}$$

ساختار رابطه فوق به صورت شکل صفحه بعد است. (نوع مستقیم شماره ۱)



شکل (۴-۳۶): نمایش نوع مستقیم شماره ۱ مربوط $H_1(\Omega)$ در مثال (۴-۲۳)

البته می توان ساختار فوق را با جابه جا کردن جزئی در سیستم به صورت زیر نمایش داد. (نوع مستقیم شماره ۲)



شکل (۴-۳۷): نمایش نوع مستقیم شماره ۲ مربوط به $H_1(\Omega)$ در مثال (۴-۲۳)

اکنون لازم است $H_2(\Omega)$ را نیز به کمک بلوک های اساسی بسازیم. این کار را با نوشتن $H_2(\Omega)$ به صورت حاصل تقسیم $Y(\Omega)$ بر $Y_1(\Omega)$ آغاز می کنیم.

$$H_2(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{Y_1(\Omega)} = \frac{1 + \mu_1 e^{-j\Omega}}{1 + \eta_1 e^{-j\Omega}}$$

رابطه فوق را می توان به صورت زیر نوشت.

$$Y(\Omega)(1 + \eta_1 e^{-j\Omega}) = Y_1(\Omega)(1 + \mu_1 e^{-j\Omega})$$

و در حوزه زمان می توان نوشت.

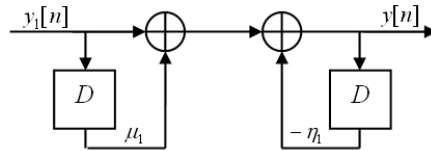
$$y[n] + \eta_1 y[n-1] = y_1[n] + \mu_1 y_1[n-1]$$

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

و یا

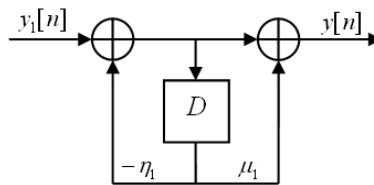
$$y[n] = y_1[n] + \mu_1 y_1[n-1] - \eta_1 y[n-1]$$

بنابراین می توان نمایش زیر را برای تابع انتقال $H_2(\Omega)$ ارائه نمود (نوع مستقیم شماره ۱).



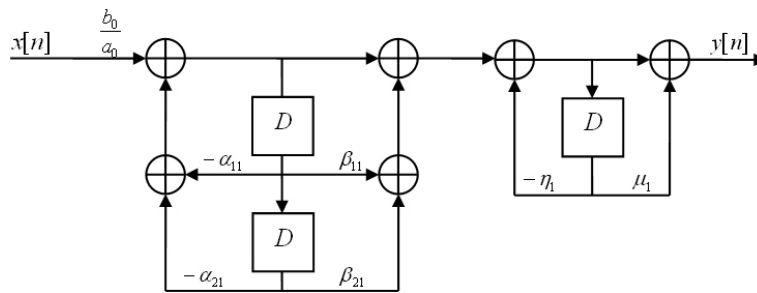
شکل (۳۸-۴): نمایش نوع مستقیم شماره ۱ مربوط به $H_2(\Omega)$ در مثال (۲۳-۴)

و نمایش نوع مستقیم شماره ۲ به صورت زیر بدست می آید.



شکل (۳۹-۴): نمایش نوع مستقیم شماره ۲ مربوط به $H_2(\Omega)$ در مثال (۲۳-۴)

اکنون از ترکیب دو شکل (۳۷-۴) و (۳۹-۴) می توان ساختار سری مربوط به مثال (۲۳-۴) را بدست آورد.



شکل (۴۰-۴): نمایش ساختار سری مثال (۲۳-۴)

واضح است که می توان جای دو بلوک $H_1(\Omega)$ و $H_2(\Omega)$ را در ساختار سری عوض کرد. ساختار معادل دیگری که برای سیستم با پاسخ فرکانسی (۱۶۹-۴) می توان در نظر گرفت بنام ساختار موازی معروف است. این ساختار از نوشتن معادله (۱۶۹-۴) به صورت (۱۸۱-۴) استخراج می گردد.

$$H(\Omega) = \frac{b_N}{b_N} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 + \eta_k e^{-j\Omega}} \quad (۱۸۱-۴)$$

در اینجا نیز η_k در حالت کلی عدد مختلط می باشد. اگر هر زوج ریشه های مختلط مزدوج را در یک جمله مختصر کنیم، رابطه (۱۸۱-۴) بصورت (۱۸۲-۴) تبدیل می شود.

$$H(\Omega) = \frac{b_N}{b_N} + \sum_{k=1}^Q \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k} e^{-j\Omega}}{1 + \alpha_{1k} e^{-j\Omega} + \alpha_{2k} e^{-j2\Omega}} + \sum_{k=1}^{N-2Q} \frac{A_k}{1 + \eta_k e^{-j\Omega}} \quad (۱۸۲-۴)$$

در رابطه (۴-۱۸۱) تمام ضرایب حقیقی هستند و می توان آن را بوسیله بلوک های اساسی ساخت. جهت روشن تر شدن مطلب به مثال (۴-۲۴) توجه کنید.

مثال (۴-۲۴): $H(\Omega)$ را توسط بلوک های اساسی بسازید.

$$H(\Omega) = 1 + \sum_{k=1}^2 \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k}e^{-j\Omega}}{1 + \alpha_{1k}e^{-j\Omega} + \alpha_{2k}e^{-j2\Omega}} + \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{1 + \eta_k e^{-j\Omega}}$$

حل: می توان $H(\Omega)$ را به صورت زیر نوشت.

$$H(\Omega) = 1 + H_1(\Omega) + H_2(\Omega) + H_3(\Omega) + H_4(\Omega)$$

که در آن

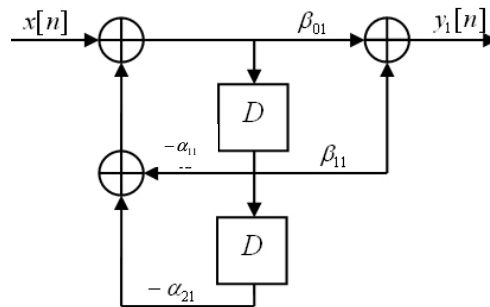
$$H_1(\Omega) = \frac{\beta_{01} + \beta_{11}e^{-j\Omega}}{1 + \alpha_{11}e^{-j\Omega} + \alpha_{21}e^{-j2\Omega}}$$

$$H_2(\Omega) = \frac{\beta_{02} + \beta_{12}e^{-j\Omega}}{1 + \alpha_{12}e^{-j\Omega} + \alpha_{22}e^{-j2\Omega}}$$

$$H_3(\Omega) = \frac{A_1}{1 + \eta_1 e^{-j\Omega}}$$

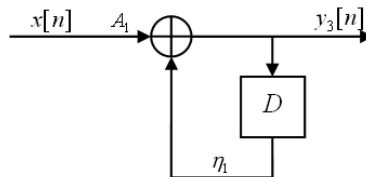
$$H_4(\Omega) = \frac{A_2}{1 + \eta_2 e^{-j\Omega}}$$

ابتدا $H_1(\Omega)$ را مشابه روشی که قبلاً توضیح دادیم، می سازیم. نتیجه کار به صورت شکل زیر است.



شکل (۴-۴۱): نمایش نوع مستقیم شماره ۲ برای $H_1(\Omega)$ مربوط به مثال (۴-۲۴)

همچنین می توان ساختار شکل (۴-۴۲) را برای $H_3(\Omega)$ بدست آورد.



شکل (۴-۴۲): نمایش ساختار سیستم $H_3(\Omega)$ مربوط به مثال (۴-۲۴)

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

همین کار را برای هر چهار سیستم تشکیل دهنده سیستم اصلی نیز انجام می دهیم و در نهایت ساختار سیستم کلی از ترکیب موازی این سیستم ها بدست می آید. این کار به صورت تمرین به عهده دانشجویان گذاشته می شود.

۴-۸ پاسخ ضربه و پله سیستم های LTI گسسته زمان مرتبه اول و دوم

به دلیل اهمیت این دو سیستم در ساخت سیستم های مراتب بالاتر می توان این سیستم ها را سیستم های پایه در نظر گرفت بنابراین بررسی آنها لازم و ضروری است.

۴-۸-۱ پاسخ ضربه و پله سیستم مرتبه اول

سیستم مرتبه اول در حالت کلی با معادله تفاضلی زیر مشخص می گردد.

$$y[n] - \alpha y[n-1] = x[n] \quad (۴-۱۸۳)$$

و پاسخ فرکانسی آن به صورت زیر است (با فرض $|\alpha| < 1$).

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \quad (۴-۱۸۴)$$

بنابراین پاسخ ضربه سیستم مرتبه اول برابر است با

$$h[n] = \alpha^n u[n] \quad (۴-۱۸۵)$$

چند نمونه از این پاسخ ضربه ها به ازاء مقادیر مختلف α در شکل (۴-۴۳) نمایش داده شده است.

پاسخ پله نیز به صورت زیر از کانولوشن پاسخ ضربه در دنباله پله واحد قابل محاسبه است.

$$s[n] = h[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-k] u[k] \quad (۴-۱۸۶)$$

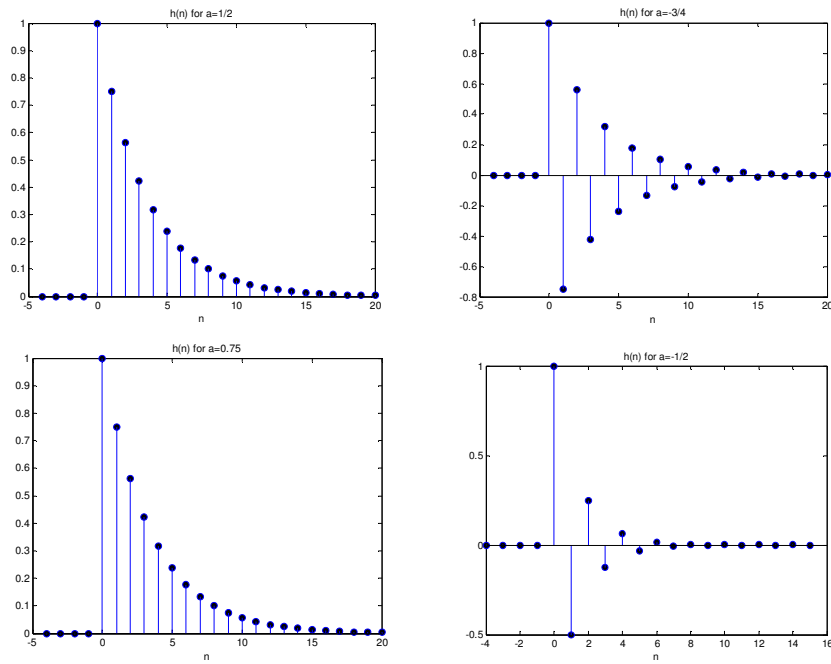
$$s[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{n-k} u[n-k] = \alpha^n \sum_{k=0}^n \alpha^{-k} = \alpha^n \frac{1 - \alpha^{-(n+1)}}{1 - \alpha^{-1}} \quad (۴-۱۸۷)$$

و یا

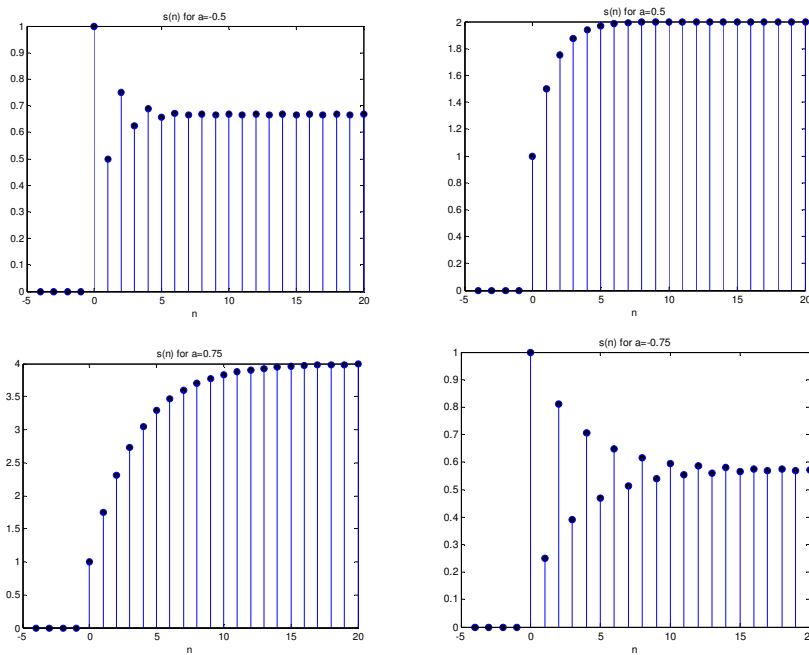
$$s[n] = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} u[n] \quad (۴-۱۸۸)$$

چند نمونه از این پاسخ پله ها به ازاء مقادیر مختلف $\alpha = a$ از روی رابطه (۴-۱۸۴) در شکل (۴-۴۴) رسم شده است.

همچنین دامنه و فاز تابع انتقال این سیستم به ازاء مقادیر مختلف $\alpha = a$ در شکل (۴-۴۵) رسم شده است.

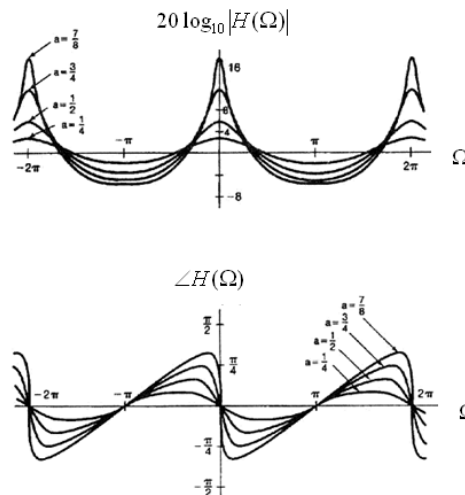


شکل (۴-۴): نمونه‌هایی از پاسخ ضربه سیستم‌های مرتبه اول به صورت رابطه (۴-۱۸۵) به ازاء مقادیر مختلف a



شکل (۴-۴): چند نمونه از پاسخ پله سیستم مرتبه اول به صورت رابطه (۴-۱۸۸) به ازاء مقادیر مختلف a

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان



شکل (۴-۴۵): دامنه و فاز پاسخ فرکانسی سیستم مرتبه اول به ازاء مقادیر مختلف a

۴-۸-۲ پاسخ ضربه و پله سیستم های مرتبه دوم

در حالت کلی می توان یک سیستم مرتبه دوم را توسط معادله تفاضلی به صورت زیر نمایش داد.

$$y[n] - 2r \cos \theta y[n-1] + r^2 y[n-2] = x[n] \quad (۴-۱۸۹)$$

با فرض $0 \leq \theta \leq \pi, 0 < r < 1$ پاسخ فرکانسی برابر است با

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - 2r \cos \theta e^{-j\Omega} + r^2 e^{-j2\Omega}} \quad (۴-۱۹۰)$$

می توان مخرج $H(\Omega)$ را به حاصلضرب دو عامل تجزیه کرد.

$$H(\Omega) = \frac{1}{[1 - (re^{-j\theta})e^{-j\Omega}][1 - (re^{j\theta})e^{-j\Omega}]} \quad (۴-۱۹۱)$$

می توان $H(\Omega)$ را با فرض $\theta \neq 0, \pi$ به صورت زیر نمایش داد.

$$H(\Omega) = \frac{A}{1 - (re^{j\theta})e^{-j\Omega}} + \frac{B}{1 - (re^{-j\theta})e^{-j\Omega}} \quad (۴-۱۹۲)$$

که در آن

$$A = \frac{e^{j\theta}}{j2 \sin \theta}, \quad B = \frac{-e^{-j\theta}}{j2 \sin \theta} \quad (۴-۱۹۳)$$

در این صورت پاسخ ضربه برابر است با

$$h[n] = [A(re^{j\theta})^n + B(re^{-j\theta})^n]u[n] = \frac{r^n \sin[(n+1)\theta]}{\sin \theta} u[n] \quad (۴-۱۹۴)$$

اگر $\theta = 0$ باشد می توان $H(\Omega)$ را به صورت زیر نوشت.

$$H(\Omega) = \frac{1}{(1 - re^{-j\Omega})^2} \quad (۴-۱۹۵)$$

و در این حالت خاص $h[n]$ برابر است با

$$h[n] = (n+1)r^n u[n+1] = (n+1)r^n u[n] \quad (۱۹۶-۴)$$

و اگر $\theta = \pi$ باشد.

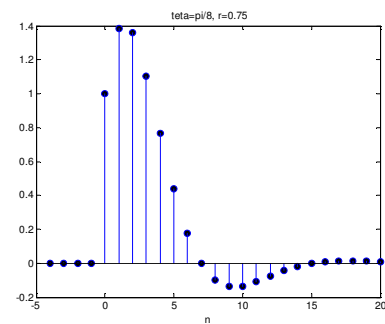
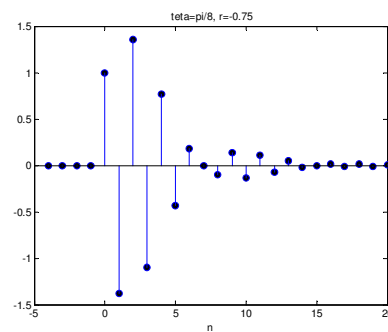
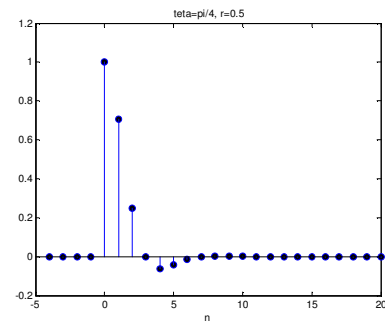
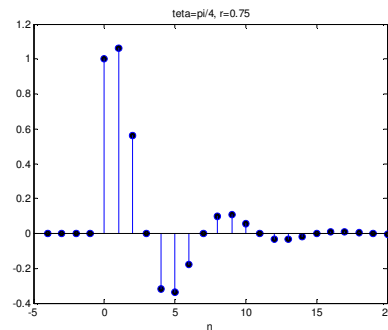
$$H(\Omega) = \frac{1}{(1 + re^{-j\Omega})^2} \quad (۱۹۷-۴)$$

و پاسخ ضربه برابر است با

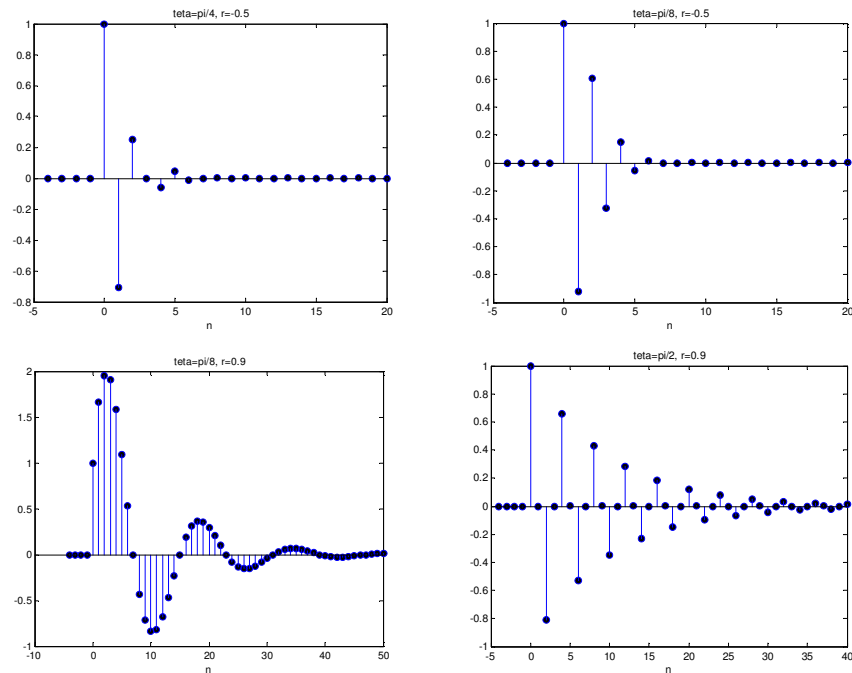
$$h[n] = (n+1)(-r)^n u[n+1] = (n+1)(-r)^n u[n] \quad (۱۹۸-۴)$$

چند نمونه از تابع انتقال و پاسخ ضربه سیستم های مرتبه دوم در شکل های ۴-۴۶ و ۴-۴۷ نشان داده شده است.

از این شکل ها نتیجه می گیریم که نرخ نزول $h[n]$ با تغییر r کنترل می شود، هر چه r به واحد نزدیکتر باشد، نرخ نزول کمتر می شود. همچنین θ تعیین کننده فرکانس نوسان پاسخ حول مقدار نهایی خود می باشد. اگر $\theta = 0$ باشد، هیچگونه نوسانی در $h[n]$ مشاهده نمی شود، اما اگر $\theta = \pi$ باشد، نوسان ها سریع خواهند شد.



فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان



شکل (۴-۴۶) چند نمونه از پاسخ ضربه سیستم‌های مرتبه دوم به ازاء مقادیر مختلف θ, r

اثر تغییر r و θ را در شکل موج پاسخ پله نیز می‌توان مشاهده کرد اگر $\theta \neq 0, \pi$ باشد، پاسخ پله برابر است با

$$s[n] = u[n] * h[n] = \left[A \frac{1 - (re^{j\theta})^{n+1}}{1 - re^{j\theta}} + B \frac{1 - (re^{-j\theta})^{n+1}}{1 - re^{-j\theta}} \right] u[n] \quad (۴-۱۹۹)$$

و اگر $\theta = 0$ باشد.

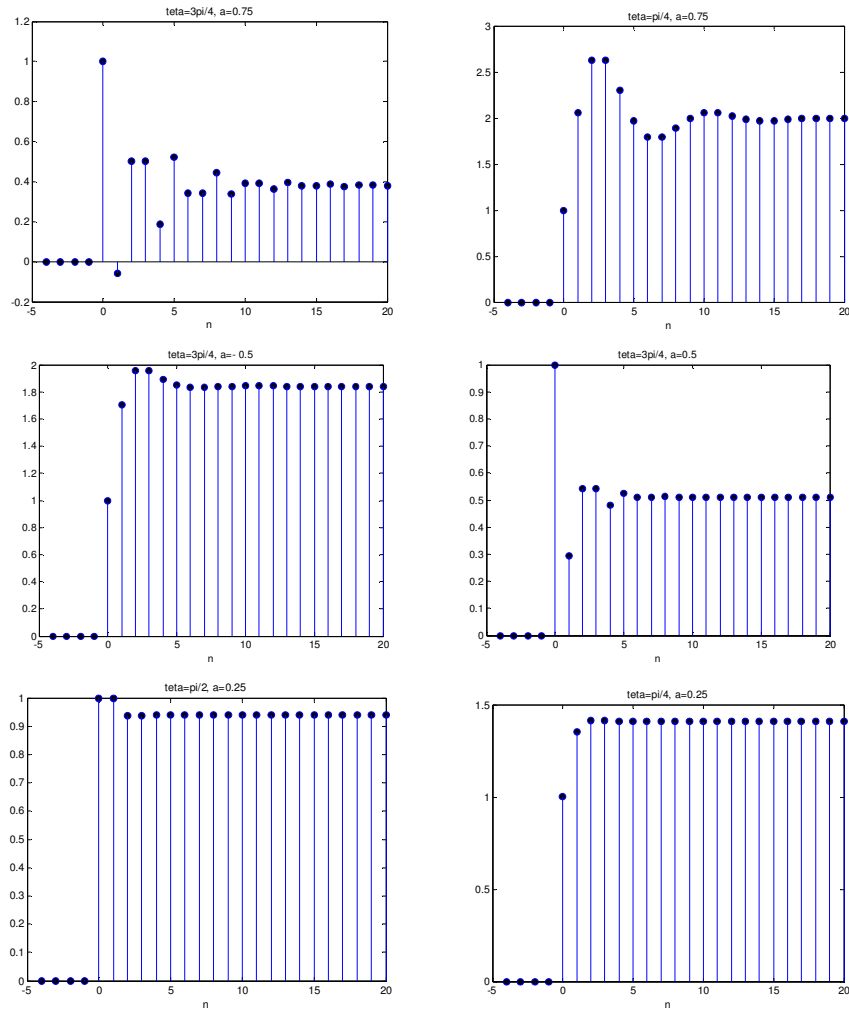
$$s[n] = \left[\frac{1}{(r-1)^2} - \frac{r}{(r-1)^2} r^n + \frac{r}{r-1} (n+1)r^n \right] u[n] \quad (۴-۲۰۰)$$

و اگر $\theta = \pi$ باشد.

$$s[n] = \left[\frac{1}{(r+1)^2} + \frac{r}{(r+1)^2} (-r)^n + \frac{r}{r+1} (n+1)(-r)^n \right] u[n] \quad (۴-۲۰۱)$$

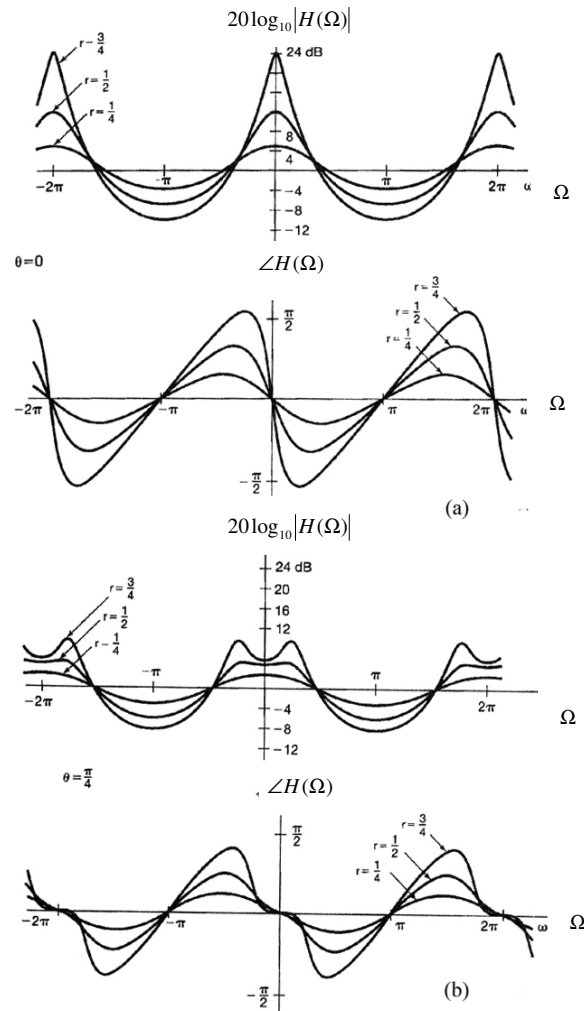
شکل پاسخ ضربه برای مقادیر مختلف θ, r در شکل (۴-۴۷) رسم شده است. می‌توان نشان داد که به ازاء هر مقدار θ غیر از صفر پاسخ ضربه دارای نوسانات میرا خواهد بود و پاسخ پله دارای بالاپرش و نوسان حول مقدار نهایی می‌باشد و جالب است توجه کنیم که θ در حقیقت تعیین کننده باند فرکانسی است که توسط سیستم مرتبه دوم تقویت می‌شود و r تعیین کننده میزان قله و تیزی آن در پاسخ فرکانسی و در باند عبور می‌باشد.

چند نمونه از پاسخ فرکانسی سیستم های مرتبه دوم به ازاء مقادیر مختلف θ, r در شکل (۴-۴۸) رسم شده اند.



شکل ۴-۴۷ پاسخ پله سیستم مرتبه دوم به ازاء مقادیر مختلف $\theta, r = a$

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان



شکل (۴-۴۸): رسم پاسخ فرکانسی سیستم مرتبه دوم به ازاء مقادیر مختلف θ, r

در پایان این بحث لازم به ذکر است که اگر معادله تفاضلی سیستم مرتبه دوم به صورت زیر باشد.

$$y[n] - (d_1 + d_2)y[n-1] + d_1d_2y[n-2] = x[n] \quad (۴-۲۰۲)$$

که در آن d_1, d_2 اعداد حقیقی هستند و در آن صورت می توان سیستم مرتبه دوم را به حاصلضرب دو سیستم مرتبه اول تفکیک نمود. مراحل تفکیک به صورت زیر است.

$$H(\Omega) = \frac{1}{(1 - d_1 e^{-j\Omega})(1 - d_2 e^{-j\Omega})} = \frac{A}{1 - d_1 e^{-j\Omega}} + \frac{B}{1 - d_2 e^{-j\Omega}} \quad (۴-۲۰۳)$$

که در آن

$$A = \frac{d_1}{d_1 - d_2}, \quad B = \frac{d_2}{d_2 - d_1} \quad (۲۰۴-۴)$$

در این صورت پاسخ ضربه و پاسخ پله به صورت زیر خواهند بود.

$$h[n] = [Ad_1^n + Bd_2^n]u[n] \quad (۲۰۵-۴)$$

$$s[n] = \left[A \left(\frac{1-d_1^{n+1}}{1-d_1} \right) + B \left(\frac{1-d_2^{n+1}}{1-d_2} \right) \right] u[n] \quad (۲۰۶-۴)$$

می بینیم در این حالت پاسخ ضربه شامل دو تابع نمایی حقیقی نزولی خواهد بود. چنین سیستمی را می توان از ترکیب سری دو سیستم مرتبه اول بدست آورد. اگر d_1, d_2 منفی باشند پاسخ نوسانی خواهد بود.

تاکنون توجه خود را به سیستم های پایدار معطوف کرده بودیم (سیستم هایی که تبدیل فوریه دارند). در حالت کلی سیستم مرتبه اولی که توسط معادله تفاضلی (۱۸۳-۴) مشخص می شود به ازاء $|a| > 1$ ناپایدار است و سیستم مرتبه دوم که توسط معادله تفاضلی (۱۸۹-۴) یا معادله تفاضلی (۲۰۲-۴) مشخص می شوند متناظراً به ازاء $|d_1| \geq 1, |d_2| \geq 1$ ناپایدار می باشند و خارج از مبحث فعلی ما قرار می گیرند.

۹-۴ خلاصه

در این فصل با توجه به اهمیت دنباله ها و سیستم های گسسته زمان ابتدا سری فوریه گسسته مورد بحث قرار گرفته و سپس تبدیل فوریه گسسته زمان (DTFT) مورد بحث قرار گرفت. روش استفاده از ضرایب DFT در محاسبه کانولوشن و خواص DTFT به تفصیل مورد بحث قرار گرفت. روش ساخت سیستم های مراتب بالا به کمک بلوک های اساسی و بررسی سیستم های مراتب اول و دوم به عنوان بلوک های اصلی سازنده سیستم های مراتب بالاتر در پایان مورد بحث قرار گرفتند. مثال (۲۵-۴): سری فوریه گسسته زمان دنباله زیر را بنویسید.

$$f[n] = \cos(0.1\pi n)$$

حل: در این حالت بدلیل اینکه $\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{20}$ می باشد، $f[n]$ متناوب است و دوره تناوب آن به صورت زیر محاسبه می شود.

$$N_0 = m \left(\frac{2\pi}{\Omega} \right) = m \left(\frac{2\pi}{0.1\pi} \right) = 20m$$

کوچکترین عدد صحیح m که $20m$ را به یک عدد صحیح تبدیل نماید به ازاء $m=1$ حاصل می شود، بنابراین دوره تناوب این دنباله $N_0=20$ می باشد و سری فوریه به صورت زیر است.

فصل چهارم: تبدیل فوریۀ گسسته زمان

$$\begin{aligned} f[n] &= \sum_{k=0}^{19} a_k e^{j0.1\pi k} \\ a_k &= \frac{1}{20} \sum_{n=0}^{19} f[n] e^{-j0.1\pi kn} = \frac{1}{20} \sum_{n=0}^{19} \cos(0.1\pi n) e^{-j0.1\pi kn} \\ &= \frac{1}{40} \sum_{n=0}^{19} (e^{j0.1\pi n} + e^{-j0.1\pi n}) e^{-j0.1\pi kn} \\ &= \frac{1}{40} \left[\sum_{n=0}^{19} e^{j0.1\pi n(1-k)} + \sum_{n=0}^{19} e^{-j0.1\pi n(1+k)} \right] \end{aligned}$$

نتیجتاً اولین مجموع به ازاء جمیع مقادیر k صفر است به جز $k=1$. همچنین دومین مجموع به ازاء جمیع مقادیر k صفر است به جز $k=19$ ، در این صورت داریم.

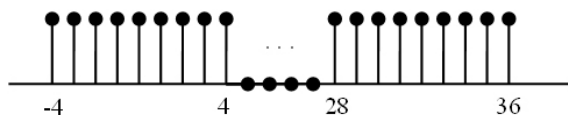
$$\begin{aligned} a_1 &= a_{19} = \frac{1}{2} \\ f[n] &= \frac{1}{2} (e^{j0.1\pi n} + e^{j1.9\pi n}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{j0.1\pi n} + e^{-j0.1\pi n}) \end{aligned}$$

مثال (۴-۲۶): سری فوریۀ گسسته زمانی $f[n] = \sin 0.1\pi n$ را بیابید.

حل: مشابه حل مثال قبلی به نتیجه زیر می‌رسیم.

$$f[n] = \frac{1}{j2} [e^{j0.1\pi n} - e^{-j0.1\pi n}]$$

مثال (۴-۲۷): سری فوریۀ گسسته زمانی دنباله رسم شده در زیر را بیابید.



شکل (۴-۴۹) سیگنال مربوط به مثال ۴-۲۷

حل: دوره تناوب این دنباله مساوی ۳۲ است پس $\Omega_0 = \frac{2\pi}{32} = \frac{\pi}{16}$ در نتیجه سری فوریۀ به صورت

زیر است.

$$f[n] = \sum_{k=\langle 32 \rangle} a_k e^{jk \frac{\pi}{16} n}, \quad a_k = \frac{1}{32} \sum_{n=\langle 32 \rangle} f[n] e^{-jk \frac{\pi}{16} n}$$

برای سادگی فرض می‌کنیم در مجموع دوم $-16 \leq n \leq 15$ انتخاب گردد، در این صورت

$$a_k = \frac{1}{32} \sum_{n=-16}^{15} f[n] e^{-jk \frac{\pi}{16} n}$$

و چون در فاصله مذکور فقط $f[n]$ به ازاء $-4 \leq n \leq 4$ مقدار دارد.

$$a_k = \frac{1}{32} \sum_{n=-4}^4 e^{-jk\frac{\pi}{16}n}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{32} \left[\frac{e^{-j\frac{5\pi k}{16}} - e^{j\frac{4\pi k}{16}}}{e^{-j\frac{\pi k}{16}} - 1} \right] \\ &= \frac{1}{32} \frac{e^{-j\frac{0.5\pi k}{16}} \left[e^{-j\frac{4.5\pi k}{16}} - e^{j\frac{4.5\pi k}{16}} \right]}{e^{-j\frac{0.5\pi k}{16}} \left[e^{-j\frac{0.5\pi k}{16}} - e^{j\frac{0.5\pi k}{16}} \right]} \\ &= \frac{1}{32} \frac{\sin(\frac{4.5\pi k}{16})}{\sin(\frac{0.5\pi k}{16})} \\ &= \frac{1}{32} \frac{\sin(4.5k\Omega_0)}{\sin(0.5k\Omega_0)} \quad , \quad \Omega_0 = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

مثال (۴-۲۸): نشان دهید که دنباله‌هایی به صورت

$$\phi_k[n] = \delta[n-k] \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$$

در فاصله $[-N, N]$ متعامد یکه (ارتونرمال) می‌باشند.

حل: کافی است شرایط زیر را تحقیق کنیم.

$$\sum_{n=-N_1}^{N_1} \phi_k[n] \phi_k^*[n] = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

با قرار دادن $\phi_m[n], \phi_k[n]$ در رابطه فوق داریم.

$$\sum_{n=-N_1}^{N_1} \delta[n-k] \delta[n-m]$$

ولی می‌بینیم که این مجموع به اِزاءِ جميع مقادیر k, m مساوی صفر است، مگر اینکه $k = m$ باشد.

در آن صورت داریم.

$$\sum_{n=-N_1}^{N_1} (\delta[n-k])^2 = 1$$

و اثبات کامل می‌شود.

مثال (۴-۲۹): تبدیل فوریه دنباله زیر را بیابید.

$$x[n] = a^n u[-(n+1)]$$

حل:

فصل چهارم: تبدیل فوریۀ گسسته زمان

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-(n+1)] e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (ae^{-j\Omega})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a} e^{j\Omega}\right)^n = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a} e^{j\Omega}\right)^n \\ &= -1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{a} e^{j\Omega}} = \frac{1}{ae^{-j\Omega} - 1} = \frac{1}{(a\cos\Omega - 1) - ja\sin\Omega} \quad |a| > 1 \text{ به شرط} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} |X(\Omega)| &= \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\Omega}} \\ \angle X(\Omega) &= \tan^{-1} \left[\frac{a\sin\Omega}{a\cos\Omega - 1} \right] \end{aligned}$$

مثال (۳۰-۴): تبدیل معکوس فوریۀ طیف پالس مربعی $X(\Omega)$ را بیابید.

$$X(\Omega) = \text{rect}\left(\frac{\Omega}{2\Omega_c}\right)$$

که در آن

$$\text{rect}\left(\frac{x}{2a}\right) = \begin{cases} 1 & -a < x < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

حل: طبق رابطه تبدیل معکوس فوریۀ داریم.

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \frac{1}{j2\pi} e^{j\Omega n} \Big|_{-\Omega_c}^{\Omega_c} = \frac{\sin(\Omega_c n)}{\pi} = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\Omega_c n}{\pi}\right) \end{aligned}$$

مثال (۴-۳۱): تبدیل فوریۀ دنباله های $x_2[n] = \delta[n - n_0]$, $x_1[n] = \delta[n]$ را بیابید.

حل:

$$\begin{aligned} X_1(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] e^{-j\Omega n \times 0} = 1 \end{aligned}$$

برای دنباله دوم نیز داریم.

$$X_2(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0] e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega n_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0] = e^{-j\Omega n_0}$$

۳۲۰

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم ها

مثال (۴-۳۲): نشان دهید که مجموعه سیگنالی به صورت $\phi_k(n) = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ به ازاء $k = 0, 1, \dots, N-1$ در فاصله ای به طول N متعامد هستند.

حل: کافیت مجموع زیر را حساب کنیم و تساوی را ثابت کنیم.

$$\sum \phi_k[n] \phi_m^*[n] = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ A & k = m \end{cases}$$

که A عدد دلخواهی است.

با جایگذاری داریم (فاصله را به طور دلخواه از ۰ تا $N-1$ در نظر می گیریم ولی هر فاصله دیگری با همین طول نیز همین جواب را می دهد).

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} e^{-jm\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\frac{2\pi}{N}n}$$

در متن درس ثابت شده است که مجموعی به صورت فوق به ازاء $k \neq m$ مساوی صفر است و به ازاء

$k = m$ مساوی N است. پس

$$\sum \phi_k[n] \phi_m^*[n] = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ N & k = m \end{cases}$$

مثال (۴-۳۳): نشان دهید اگر $x[n] = \sum_{i=1}^M a_i \phi_i[n]$ باشد، که در آن $\phi_i[n]$ یک مجموعه سیگنال

متعامد در فاصله (N_1, N_2) هستند، در آن صورت

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 = \sum_{i=1}^M |a_i|^2 A_i$$

که در آن A_i عدد ثابت است که البته تابع اندیس نیز می تواند باشد.

حل:

$$\begin{aligned} \sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 &= \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] x^*[n] = \sum_{n=N_1}^{N_2} \left[\sum_{i=1}^M a_i \phi_i[n] \sum_{j=1}^M a_j^* \phi_j^*[n] \right] \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_i a_j^* \sum_{n=N_1}^{N_2} \phi_i[n] \phi_j^*[n] \end{aligned}$$

اما در مثال (۴-۳۲) ثابت باشد که اگر $\phi_i[n]$ تشکیل یک مجموعه سیگنال متعامد به ازاء مقادیر

مشخصی از j, i در فاصله مشخص را بدهد در آن صورت مجموع $\sum_{n=N_1}^{N_2} \phi_i[n] \phi_j^*[n]$ فقط به ازاء

مقادیر $j = i$ غیر صفر و مساوی A_i می باشد، بنابراین

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 = \sum_{i=1}^M |a_i|^2 A_i$$

و قضیه ثابت می شود.

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

مثال (۴-۳۴): پاسخ ضربه یک سیستم LTI گسسته زمان به صورت زیر است.

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

سری فوریه خروجی سیستم را بیابید اگر ورودی آن به صورت زیر باشد.

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta[n-4m]$$

حل: ابتدا تبدیل فوریه ورودی را پیدا می کنیم، برای این کار احتیاج به ضرایب سری فوریه $x[n]$ داریم.

$$a_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 e^{-jk\frac{2\pi}{4}n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n-4m] = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 e^{-jk\frac{2\pi}{4}n} \delta[n] = \frac{1}{4}$$

بنابراین می توان $X(\Omega)$ را بدین صورت نوشت.

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\Omega - \frac{k\pi}{2})$$

اما تبدیل فوریه ورودی را قبلاً در متن درس حساب کرده ایم.

$$X(\Omega) = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 - \cos\Omega + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5 - 4\cos\Omega}$$

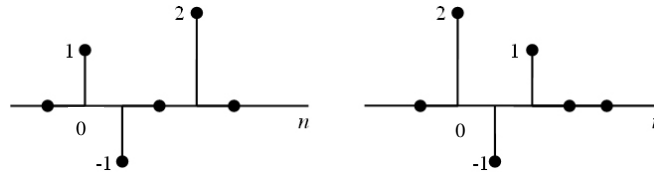
تبدیل فوریه خروجی از حاصلضرب تبدیل فوریه ورودی در تبدیل فوریه پاسخ ضربه سیستم به صورت زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= H(\Omega)X(\Omega) = \frac{3}{5 - 4\cos\Omega} \times 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\Omega - \frac{k\pi}{2}) \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{3a_k}{5 - 4\cos\frac{k\pi}{2}} \delta(\Omega - \frac{k\pi}{2}) \end{aligned}$$

بنابراین ضرایب سری فوریه خروجی از رابطه زیر بدست می آیند.

$$b_k = \frac{\frac{3}{4}}{5 - 4\cos\frac{k\pi}{2}}$$

مثال (۴-۳۵): مراحل کانولوشن معمولی دو دنباله زیر را به کمک استفاده از DFT توضیح دهید.



شکل (۴-۵۰) مربوط به مثال (۴-۳۵)

حل: ابتدا DFT شش نقطه ای $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را حساب می کنیم. چون $N_2=3, N_1=4$ می باشد، لذا دوره تناوب برای حاصل کانولوشن را برابر $N = N_1 + N_2 - 1 = 6$ در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned}\tilde{X}_1(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^3 x_1[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{n=0}^3 x_1[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{6})n} = \frac{1}{6} \left[1 - e^{-jk\frac{\pi}{3}} + 2e^{-jk\pi} \right]\end{aligned}$$

که در آن $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

همین کار را برای $x_2[n]$ نیز انجام می دهیم.

$$\tilde{X}_2(k) = \frac{1}{6} \left[2 - e^{-jk\frac{\pi}{3}} + e^{-jk\frac{2\pi}{3}} \right], \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

مرحله بعدی محاسبه حاصلضرب دو DFT می باشد.

$$\begin{aligned}\tilde{Y}(k) &= 6\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k) = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 y[n] e^{-jk\frac{2\pi}{3}n} \\ &= \frac{6}{36} \left[2 - e^{-jk\frac{\pi}{3}} + e^{-jk\frac{2\pi}{3}} - 2e^{-jk\frac{\pi}{3}} + e^{-j\frac{2k\pi}{3}} - e^{-jk\pi} + 4e^{-jk\pi} \right. \\ &\quad \left. - 2e^{-j\frac{4k\pi}{3}} + 2e^{-j\frac{5k\pi}{3}} \right] \\ &= \frac{6}{36} \left[2 - 3e^{-jk\frac{\pi}{3}} + 2e^{-j\frac{2k\pi}{3}} + 3e^{-jk\pi} - 2e^{-j\frac{4k\pi}{3}} + 2e^{-j\frac{5k\pi}{3}} \right]\end{aligned}$$

بنابراین با توجه به رابطه معکوس DFT یا IDFT می توان حاصل کانولوشن معمولی $x_1[n]$ و $x_2[n]$ را بدست آورد.

$$y[n] = \sum_{k=0}^5 \tilde{Y}(k) e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$y[0] = 2, \quad y[1] = -3, \quad y[2] = 2, \quad y[3] = 3, \quad y[4] = -2, \quad y[5] = 2$$

که البته مقادیر فوق از روش کانولوشن معمولی نیز به سادگی قابل محاسبه می باشد.

مثال (۳۶-۴): فرض کنید $X(\Omega)$ تبدیل فوریه یک دنباله غیرحقیقی $x[n]$ باشد. تبدیل فوریه دنباله های زیر را برحسب تبدیل فوریه $X(\Omega)$ بیابید.

الف) $\Re\{x[n]\}$

ب) $x^*[-n]$

ج) $\mathcal{E}v\{x[n]\}$

حل: الف)

$$y[n] = \Re\{x[n]\} = \frac{1}{2} \{x[n] + x^*[n]\}$$

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

با گرفتن تبدیل فوریه از طرفین رابطه فوق داریم.

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2} \{F\{x[n]\} + F\{x^*[n]\}\}$$

اکنون فقط لازم است تبدیل فوریه $x^*[n]$ را بیابیم. تبدیل فوریه $x[n]$ به صورت زیر است.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

در نتیجه داریم.

$$X^*(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n] e^{j\Omega n}$$

و بالاخره با تبدیل Ω به $-\Omega$ رابطه فوق به صورت زیر تبدیل می شود

$$X^*(-\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n] e^{-j\Omega n}$$

پس تبدیل $x^*[n]$ فوریه مساوی است با $X^*(-\Omega)$ بنابراین

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2} \{X(\Omega) + X^*(-\Omega)\}$$

(ب) به سادگی با توجه به رابطه تبدیل فوریه و تبدیل n به $-n$ داریم.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n] e^{j\Omega n}$$

در نتیجه خواهیم داشت.

$$X^*(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[-n] e^{-j\Omega n}$$

بنابراین تبدیل فوریه $x^*[-n]$ مساوی $X^*(\Omega)$ می باشد.

$$y[n] = \mathcal{E}\mathcal{V}\{x[n]\} = \frac{1}{2} \{x[n] + x[-n]\} \quad (\text{ج})$$

برای بدست آوردن تبدیل فوریه $\mathcal{E}\mathcal{V}\{x[n]\}$ کافی است تبدیل فوریه $x[-n]$ را یافت. با توجه به رابطه تبدیل فوریه می توان به سادگی تبدیل فوریه $x[-n]$ را یافت.

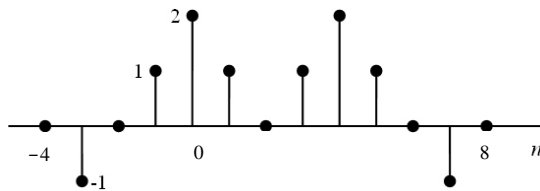
$$X(-\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n] e^{-j\Omega n}$$

بنابراین تبدیل فوریه $y[n]$ برابر است با

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2} \{X(\Omega) + X(-\Omega)\} = \mathcal{E}\mathcal{V}\{X(\Omega)\}$$

مثال (۳۷-۴): فرض کنید $X(\Omega)$ تبدیل فوریه دنباله $x[n]$ باشد ($x[n]$ در شکل رسم شده است). بدون محاسبه مستقیم $X(\Omega)$ مطلوبست.

$$\text{الف) } X(0) \quad \text{ب) } \angle X(\Omega) \quad \text{ج) } \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) d\Omega \quad \text{د) } X(\pi) \quad \text{و) } \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$



شکل (۴-۱)

الف) با توجه به رابطه تبدیل فوری داریم

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \rightarrow X(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = 6$$

ب) با توجه به شکل $x[n]$ می بینیم دنباله $x[n+2]$ یک دنباله حقیقی زوج می باشد، بنابراین تبدیل فوریه دنباله $y[n] = x[n+2]$ دارای فاز صفر است (حقیقی می باشد) در نتیجه دنباله $x[n]$ برابر است با

$$x[n] = y[n-2]$$

و ارتباط تبدیل فوریه $x[n]$ بر حسب تبدیل فوریه $y[n]$ به صورت زیر بیان می گردد.

$X(\Omega) = Y(\Omega)e^{-j2\Omega}$ و چون $Y(\Omega)$ دارای فاز صفر است، بنابراین $X(\Omega)$ دارای فاز $e^{-j2\Omega}$ می باشد.

ج) با توجه به رابطه تبدیل معکوس فوریه داریم.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$2\pi x[0] = \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) d\Omega = 4\pi$$

بنابراین

د)

$$\begin{aligned} X(\pi) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n x[n] \\ &= (-1)^{-3}(-1) + (-1)^{-1}(1) + (-1)^0(2) + (-1)^1(1) + (-1)^3(1) \\ &\quad + (-1)^4(2) + (-1)^5(1) + (-1)^7(-1) \\ &= 1 - 1 + 2 - 1 - 1 + 2 - 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

و) طبق رابطه پارسوال

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \\ &= 2\pi[1 + 1 + 4 + 1 + 1 + 4 + 1 + 1] = 28\pi \end{aligned}$$

مثال (۴-۳۸): یک سیستم LTI علی که بوسیله معادله تفاضلی زیر بیان می گردد را در نظر بگیرید،
مطلوبست پاسخ ضربه سیستم.

$$y[n] - \frac{3}{8}y[n-1] + \frac{1}{32}y[n-2] = x[n]$$

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

حل: با استفاده از تبدیل فوریه طرفین معادله تفاضلی فوق داریم.

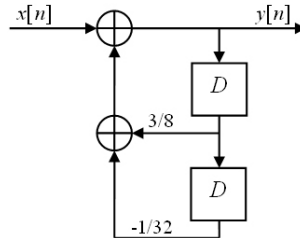
$$Y(\Omega) - \frac{3}{8}Y(\Omega)e^{-j\Omega} + \frac{1}{32}Y(\Omega)e^{-j2\Omega} = X(\Omega)$$

$$\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{1 - \frac{3}{8}e^{-j\Omega} + \frac{1}{32}e^{-j2\Omega}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega})(1 - \frac{1}{8}e^{-j\Omega})}$$

$$= \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} + \frac{-1}{1 - \frac{1}{8}e^{-j\Omega}} \quad \text{و} \quad h[n] = \left[2\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{8}\right)^n \right] u[n]$$

مثال (۳۹-۴): سیستم مثال (۳۸-۴) را به کمک بلوک های اساسی بسازید.

حل: با توجه به معادله تفاضلی به سادگی سیستم را به صورت شکل ۵۲-۴ خواهیم داشت.



شکل (۵۲-۴): مربوط به مثال (۳۹-۴)

مثال ۴۰-۴ معکوس سیستم با معادله تفاضلی

$$y[n] + y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-2]$$

را بیابید.

حل: یک روش حل این است که ابتدا تابع سیستم را بسازیم و بعد آن را معکوس کنیم. با گرفتن

تبدیل فوریه از معادله فوق داریم.

$$Y(\Omega) + Y(\Omega)e^{-j\Omega} + \frac{1}{4}Y(\Omega)e^{-j2\Omega} = X(\Omega)e^{-j\Omega} + \frac{1}{2}X(\Omega)e^{-j2\Omega}$$

و بنابراین

$$H(\Omega) = \frac{e^{-j\Omega} + \frac{1}{2}e^{-j2\Omega}}{1 + e^{-j\Omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\Omega}}$$

در نتیجه سیستم معکوس دارای تابع شبکه به صورت زیر است.

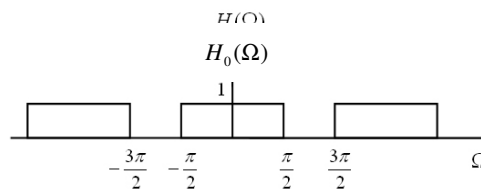
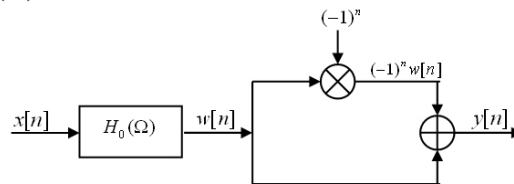
$$H_i(\Omega) = \frac{1}{H(\Omega)} = \frac{1 + e^{-j\Omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\Omega}}{e^{-j\Omega} + \frac{1}{2}e^{-j2\Omega}}$$

$$= \frac{(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}{e^{-j\Omega}(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega})} = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{e^{-j\Omega}} = e^{j\Omega} + \frac{1}{2}$$

در حوزه زمان $h_i[n] = \delta[n+1] + \frac{1}{2}\delta[n]$ همانگونه که می بینیم این سیستم علی نمی باشد.

مثال (۴-۱): طیف $H(\Omega)$ را برای سیستم زیر بیابید.

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$



شکل ۴-۵ تابع انتقال سیستم $H_0(\Omega)$

حل: برای رسم طیف $H(\Omega)$ کافیسست ورودی را $x[n] = \delta[n]$ در نظر گرفته، در آن صورت $y[n] = \delta[n]$ بدست می آید. البته لازم به ذکر است که تبدیل فوریه $(-1)^n$ قبلاً بدست آمده است.

$$(-1)^n = \cos \pi n = \frac{1}{2} [e^{j\pi n} + e^{-j\pi n}]$$

$$(-1)^n \leftrightarrow \frac{1}{2} \left[2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \pi - 2k\pi) + 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega + \pi - 2k\pi) \right]$$

که البته هر دو جمله طرف ثانی یکی هستند، پس

$$(-1)^n \leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \pi - 2k\pi)$$

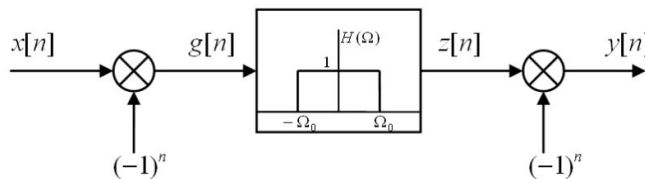
بنابراین طبق خاصیت مدولاسیون داریم.

$$H(\Omega) = H_0(\Omega) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda - \pi - 2k\pi) H_0(\Omega - \lambda) d\lambda = H_0(\Omega) + H_0(\Omega - \pi) = 1$$

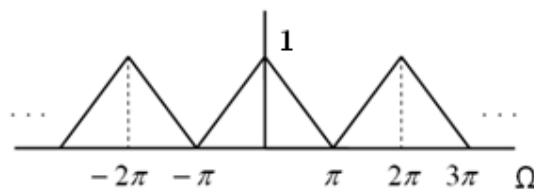
فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

یعنی این سیستم یک سیستم تمام گذر است.

مثال (۴-۸): خروجی سیستم زیر را بیابید اگر $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$.

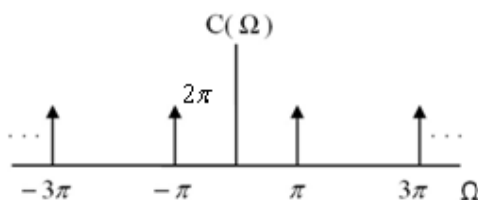


فرض کنید طیف $x[n]$ بصورت زیر باشد.

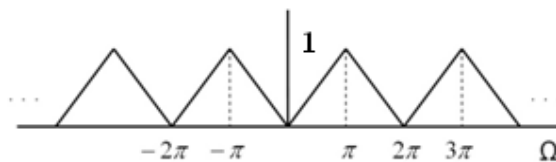


حل: طیف دنباله $c[n] = (-1)^n$ بصورت زیر است.

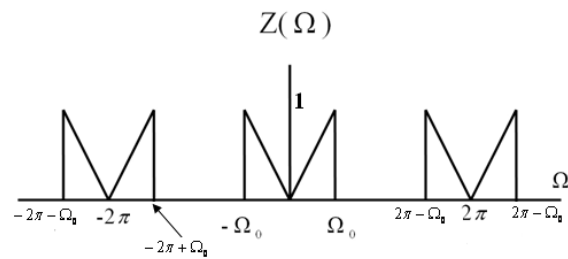
$$F[(-1)^n] = C(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - (2k+1)\pi)$$



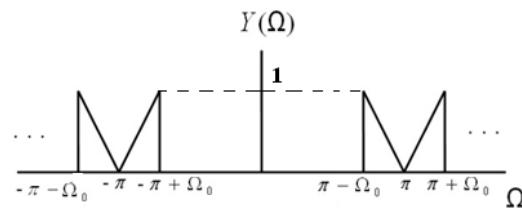
بنابراین دنباله $g[n]$ در حقیقت یک دنباله مدولاسیون دامنه می باشد که از سوار شدن دنباله مدوله کننده $x[n]$ بر روی دنباله حامل $c[n]$ یا $(-1)^n$ حاصل شده است. بنابراین طیف $G(\Omega)$ بصورت زیر بدست می آید.



$z[n]$ در حقیقت از فیلتر کردن $g[n]$ توسط یک فیلتر پایین گذر حاصل می شود. پس طیف $z[n]$ بصورت زیر است.



$y[n]$ یک دنباله مدوله شده دامنه می باشد که ناشی از سوار شدن دنباله مدوله کننده $z[n]$ روی حامل $c[n] = (-1)^n$ می باشد. بنابراین طیف $y[n]$ از یک انتقال به اندازه π در طیف $z[n]$ بدست می آید.

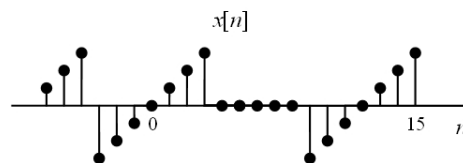
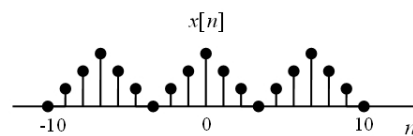


۴-۱۰ مسائل

۴-۱ سری فوریه گسسته زمانی سیگنال های زیر را بیابید.

$$x[n] = 2\cos(3.2\pi(n-3))$$

$$x[n] = 2\cos(2.2\pi n)$$

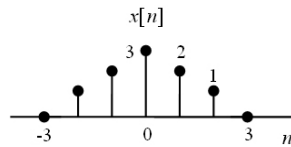


شکل ۴-۵ مربوط به مثال ۴-۱

۴-۲ تبدیل فوریه گسسته زمان دنباله های زیر را بیابید.

(الف)

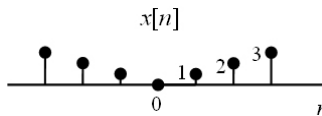
فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان



شکل ۴-۵۵ مربوط به مثال ۴-۲

ب) $y[n] = x[n-3]$ که در آن $x[n]$ همان دنباله مذکور در قسمت الف می باشد.

ج)



شکل ۴-۵۶ مربوط به مثال ۴-۲

۴-۳ تبدیل معکوس پاسخ فرکانسی زیر را بیابید (فرض کنید که سیستم علی است)

$$H(\Omega) = \frac{e^{j\Omega} + 0.32}{e^{j2\Omega} + e^{j\Omega} + 0.16}$$

۴-۴ پاسخ معکوس سیستم با معادله تفاضلی

$$y[n] + y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-2]$$

را به ورودی زیر بیابید.

$$x[n] = (0.5)^n u[n]$$

۴-۵ پاسخ سیستم $H(\Omega)$ را به ورودی $x[n]$ بیابید اگر

$$H(\Omega) = \frac{e^{j\Omega} - 0.5}{(e^{j\Omega} + 0.5)(e^{j\Omega} - 1)} \quad \text{و} \quad x[n] = 3^{-(n+1)} u[n]$$

۴-۶ فرض کنید $x_c(t)$ یک سیگنال پیوسته زمان دوره تناوب با دوره تناوب یک میلی ثانیه باشد.

سری فوریه سیگنال مذکور به صورت زیر می باشد.

$$x_c(t) = \sum_{k=-9}^9 a_k e^{j\left(\frac{2\pi k t}{10^{-3}}\right)}$$

ضرایب سری فوریه به ازاء $|k| > 9$ مساوی صفر هستند. مطلوبست ضرایب سری فوریه گسسته زمان

سیگنال $x[n]$ که با نمونه برداری از $x_c(t)$ حاصل شده است.

$$x[n] = x_c\left(\frac{n}{6} \times 10^{-3}\right)$$

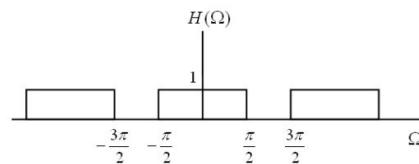
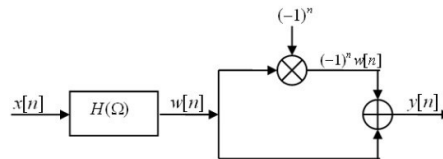
$$۴-۷ \text{ پاسخ سیستم } H(\Omega) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - \frac{1}{2}} \text{ را به ورودی } x[n] = \left(\frac{8}{10}\right)^k u[n] - 2(2)^2 u[-(n+1)] \text{ بیابید.}$$

۴-۸ تبدیل فوریه دنباله های زیر را بیابید.

$$x[n] = a^n \cos(\Omega_0 n) u[n] \quad |a| < 1, \quad x[n] = a^n \sin(\Omega_0 n) u[n] \quad |a| < 1$$

۹-۴ خروجی سیستم زیر را بیابید اگر ورودی به صورت زیر باشد.

$$x[n] = \delta[n] + 1$$



شکل ۵۷-۴ مربوط به مثال ۹-۴

۱۰-۴ تبدیل فوریه یک دنباله گسسته زمان $x[n]$ را $X(\Omega)$ می نامیم. مطلوبست تبدیل فوریه دنباله های $x_c[n]$, $x_d[n]$, $x_s[n]$ ، برحسب $X(\Omega)$ اگر

$$x_c[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & n, \text{even} \\ 0 & n, \text{odd} \end{cases}$$

$$x_s[n] = \begin{cases} x[n] & n, \text{even} \\ 0 & n, \text{odd} \end{cases}$$

$$x_d[n] = x[2n]$$

۱۱-۴ زوج دنباله های $x[n]$ و $y[n]$ را در نظر بگیرید. برای هر زوج تعیین کنید آیا سیستمی LTI یافت می شود که ورودی آن $x[n]$ و خروجی آن $y[n]$ باشد؟ (پاسخ خود را با دلیل بیان کنید). اگر چنین سیستمی وجود دارد، آیا این سیستم یگانه است؟ و یا چند سیستم (LTI یا غیر LTI) را می توان بگونه ای یافت که زوج ورودی و خروجی آن ها $[x[n], y[n]]$ باشند.

الف) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

ب) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, $y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

ج) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, $y[n] = 4^n u[-n]$

د) $x[n] = e^{\frac{jn}{8}}$, $y[n] = 2e^{\frac{jn}{8}}$

و) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$, $y[n] = \cos\frac{\pi n}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\pi n}{3}$

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

۱۲-۴ تبدیل فوریه هر یک از دنباله های زیر را بیابید.

الف $n(\frac{1}{2})^{|n|}$

ب $(\frac{1}{2})^n [u[n+3] - u[n-2]]$

ج $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\frac{1}{4})^n \delta[n-3k]$

۱۳-۴ $x[n]$ و $y[n]$ دو دنباله حقیقی با تبدیل فوریه $Y(\Omega)$, $X(\Omega)$ باشند، تابع همبستگی بین دو دنباله به صورت زیر تعریف می شود.

$$\phi_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k+n]y[k]$$

به همین ترتیب می توان $\phi_{xx}[n]$, $\phi_{yy}[n]$, $\phi_{yx}[n]$ را تعریف نمود. مطلوبست ارتباط تبدیل فوریه $Y(\Omega)$, $X(\Omega)$ بر حسب $\phi_{xx}[n]$, $\phi_{yy}[n]$, $\phi_{xy}[n]$, $\phi_{yx}[n]$

۱۴-۴ فرض کنید دنباله $x[n] = \sin(\frac{\pi n}{84}) - 2\cos(\frac{\pi n}{4})$ ورودی به هر یک از سیستم های زیر باشد.

الف $h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi n}{6})}{\pi n}$

ب $h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi n}{6})}{\pi n} + \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{\pi n}$

ج $h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi n}{6})\sin(\frac{\pi n}{3})}{\pi^2 n^2}$

مطلوبست خروجی هریک از سیستم های فوق در حوزه زمان و فرکانس.

۱۵-۴ پاسخ ضربه را برای هر یک از سیستم هایی که بوسیله معادلات تفاضلی زیر بیان می گردند بدست آورده و سپس سیستم را به کمک بلوک های اساسی بسازید (فرض کنید سیستم علی است).

الف $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$

ب $y[n] + \frac{5}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$

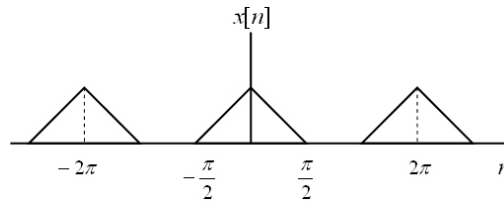
ج $y[n] + \frac{5}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{1}{8}x[n-2]$

۱۶-۴ معکوس سیستم های مثال (۱۵-۴) را بدست آورده و به کمک بلوک های اساسی بسازید.

۱۷-۴ فرض کنید طیف $x[n]$ به صورت زیر باشد. مطلوبست طیف $z[n] = x[n]p[n]$ اگر

۳۳۲

مقدمه ای بر تجزیه و تحلیل سیستم ها



شکل ۴-۵۸ مربوط به مثال ۴-۱۷

الف) $p[n] = \cos \pi n$

ب) $p[n] = \sin \frac{\pi n}{2}$

ج) $p[n] = \cos \frac{\pi n}{2}$

د) $p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - 2k]$

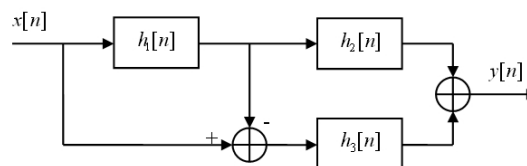
هـ) $p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - 4k]$

۴-۱۸ در سیستم زیر $H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$ را بیابید.

$$h_1[n] = e^{-|n|}$$

$$H_2(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} < |\Omega| < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$H_3(\Omega) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega} + \frac{1}{3}e^{-j2\Omega}}$$



شکل ۴-۵۹ مربوط به مثال ۴-۱۸

۴-۱۹ ورودی یک سیستم مجهول خطی به صورت زیر است.

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

اگر خروجی این سیستم در پاسخ به ورودی فوق برابر مقدار زیر باشد.

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

فصل چهارم: تبدیل فوریه گسسته زمان

مطلوبست پاسخ فرکانسی سیستم و پاسخ ضربه آن.

۴-۲۰ سیستم مطرح شده در مثال (۴-۱۹) را به کمک بلوک های اساسی بسازید.

۴-۲۱ یک سیستم LTI به کمک معادله تفاضلی زیر بیان می گردد

$$y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n]$$

الف) مطلوبست پاسخ فرکانسی سیستم.

ب) مطلوبست خروجی سیستم به ازاء ورودی های زیر.

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad \text{و} \quad x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad \text{و} \quad x[n] = \delta[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

۴-۲۲ پاسخ ضربه سیستمی با طیفی به صورت های زیر را بیابید، همچنین تعیین کنید کدامیک از سیستم های زیر علی است.

$$H(\Omega) = \frac{1 - \frac{1}{4} e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega}} \quad \text{و} \quad H(\Omega) = \frac{1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\Omega}} \quad \text{و} \quad H(\Omega) = 1 + 2e^{-j3\Omega}$$

۴-۲۳ دامنه و فاز پاسخ فرکانسی $X(\Omega)$ را رسم کنید اگر

$$X(\Omega) = 1 + 2e^{-j\Omega} \quad X(\Omega) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4} e^{-j\Omega})(1 + \frac{3}{4} e^{-j\Omega})}$$

$$X(\Omega) = \frac{1 + 2e^{-j\Omega}}{1 + 2e^{-j\Omega}} \quad X(\Omega) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega})^3}$$

۴-۲۴ سیستمی با پاسخ فرکانسی به صورت زیر را به کمک بلوک های اساسی بسازید.

$$H(\Omega) = \frac{e^{-j4\Omega}}{(1 + \frac{1}{6} e^{-j\Omega} - \frac{1}{6} e^{-j2\Omega})}$$

۴-۲۵ یک سیستم علی LTI توسط معادله تفاضلی زیر بیان می گردد

$$y[n] - \frac{\sqrt{2}}{2} y[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2] = x[n] - n[n-1]$$

مطلوبست پاسخ فرکانسی و پاسخ ضربه سیستم.

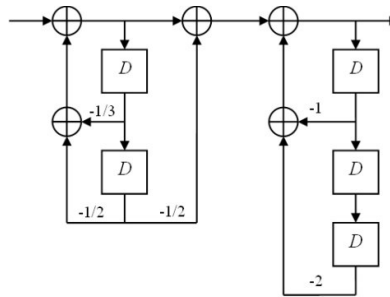
۴-۲۶ یک سیستم علی LTI با معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید.

$$y[n] - ay[n-1] = bx[n] + x[n-1]$$

مطلوبست محاسبه مقدار b بگونه ای که پاسخ فرکانسی سیستم در معادله زیر صدق کند.

$$|H(\Omega)| = 1 \quad \text{برای همه } \Omega$$

۴-۲۷ پاسخ ضربه سیستم زیر را بیابید.



شکل ۴-۶۰ مربوط به مثال ۴-۲۷

۴-۲۸ یک سیستم LTI علی با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ مفروض است. این سیستم توسط یک زوج معادله تفاضلی به صورت زیر مشخص می شود.

$$\begin{cases} y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] + w[n] + \frac{1}{2}w[n-1] = \frac{2}{3}x[n] \\ y[n] - \frac{5}{4}y[n-1] + 2w[n] - 2w[n-1] = -\frac{5}{3}x[n] \end{cases}$$

پاسخ ضربه این سیستم را بیابید (در معادله دنباله $w[n]$ یک دنباله واسطه باشد).

۴-۲۹ برنامه های کامپیوتری بنویسید که کارهای زیر را انجام دهد.

الف: از روی معادله $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ و تشکیل N معادله و N مجهول، a_k ها را حساب و رسم کنید.

ب: از روی معادله $a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ اولاً بتواند با داشتن $x[n]$ ، a_k را حساب کند و ثانیاً با داشتن a_k ، $x[n]$ را محاسبه و رسم کند.

۴-۳۰ سیستمی که دارای پاسخ ضربه به صورت زیر است را به کمک بلوک های اساسی بسازید.

$$h[n] = 5 \times (0.8)^{-|n|}$$

۴-۳۱ سیستمی که دارای پاسخ ضربه به صورت زیر است را به کمک بلوک های اساسی بسازید.

$$h[n] = e^{-2n}u[n]$$